Лекции по курсу.

Список литературы

[1] Высшая математика для экономистов. Под редакцией Н.Ш. Кремера.

[2] С.А. Минюк, Е.А. Ровба. Высшая математика.

[3] Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под редакцией В.И. Ермакова.

[4] Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Под редакцией А.П. Рябушко.

Содержание

1 Линейная алгебра

Матрицы. Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент снабжается двумя индексами: первый указывает номер строки, а второй — номер столбца, в которых расположен этот элемент.

Две матрицы называются *равными*, если числа их строк и столбцов равны и если равны элементы, расположенные на соответствующих местах этих матриц. Матрица называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все её элементы равны нулю.

Если число столбцов матрицы n равно числу её строк, то матрицу называют *квадратной матрицей порядка* n. Элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} квадратной матрицы порядка n образуют её *главную диагональ*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица называется *единичной*, если все её элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно квадратная, диагональная и единичная матрицы третьего порядка.

Действия над матрицами. Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причём некоторые из них аналогичны операциями над числами, а некоторые — специфические.

Чтобы *умножить матрицу на число*, надо каждый элемент матрицы умножить на это число. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц A и B одинаковых размерностей называется матрица, элементы которой равны сумме элементов матриц A и B, расположенных на соответствующих местах. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ A + B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой равно числу строк второй. При этом *произведением* матрицы A порядка $m \times k$ на матрицу B порядка $k \times n$ называется матрица C порядка $m \times n$, элементы c_{ij} которой вычисляются как сумма произведений элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}.$$

Пример 1. Вычислить произведение матриц A и B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По определению находим элементы матрицы AB как произведение соответствующих строки и столбца матриц A и B.

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$,	2) $(A+B)+C=A+(B+C)$,
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,	4) $A(B+C)=AB+AC$,
5) $(A+B)C=AC+BC$,	6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$,
7) $A(BC)=(AB)C$,	8) $AE=EA=A$,

где E, как обычно, единичная матрица. Следующий пример показывает, что *коммутативный* (*переместительный*) закон умножения для матриц, вообще говоря, не выполняется.

Пример 2. Найти произведения AB и BA, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 6 & 1\cdot 5+2\cdot 8 \\ 3\cdot 0+4\cdot 6 & 3\cdot 5+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+5\cdot 3 & 0\cdot 2+5\cdot 4 \\ 6\cdot 1+8\cdot 3 & 6\cdot 2+8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix},$$

то есть $AB \neq BA$. $\square$

По аналогии с числами вводим понятие *степени* матрицы A:

$$A^m = \underbrace{A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}_{m\ \text{раз}}.$$

По определению считают, что $A^0 = E$. Операция возведения в степень обладает следующими свойствами:

$$A^m \cdot A^k = A^{m+k}, \qquad (A^m)^k = A^{mk}.$$

Переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка, называется *транспонированием* матрицы A. Матрица A' называется *транспонированной* относительно матрицы A. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

1) $(A')' = A$,	2) $(\lambda A)' = \lambda A'$,
3) $(A+B)' = A'+B'$,	4) $(AB)' = B'A'$.

Определители. *Определителем матрицы второго порядка* называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1)$$

Знаки, с которыми слагаемые входят в формулу (1), легко запомнить, пользуясь *правилом треугольника.* Определитель квадратной матрицы A обозначается $|A|$ или $\det A$.

Пример 3. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$|A| = 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = \\ = 2+2-1-1+4-1 = 5. \quad \square$$

Введём понятие определителя произвольного порядка n. Для этого понадобятся следующие определения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается вычёркиванием в данном определителе строки и столбца, содержащих элемент a_{ij}. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Если например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & 11 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Известно, что каждый определитель равен сумме произведений любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения, то есть

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad (2)$$
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad (3)$$

Равенства (2) и (3) называются соответственно разложениями определителя матрицы по элементам i-й строки и j-го столбца. Формулы (2) и (3) применяются для вычисления определителей матриц.

Пример 4. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Разложим данный определитель по элементам его третьего столбца.

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = \\ = (-1)^{1+3}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{3+3}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = -3\cdot(0+2+20-5-8-0) - \\ - 1\cdot(4+2+8-1-8-8) = \\ = -3\cdot 9 - 1\cdot(-3) = -24. \quad \square$$

Свойства определителей. Вычисление определителя с помощью разложения по строке или столбцу — достаточно трудоёмкое дело. Используя свойства определителя, можно значительно упростить его вычисление.

1) При транспонировании матрицы её определитель не меняется, то есть
$$|A'| = |A|.$$

2) Общий множитель всех элементов строки или столбца определителя можно вынести за знак определителя. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3) Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4) Определитель, содержащий две одинаковые строки или столбца, равен нулю.

5) Определитель не изменяется, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6) Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|.$$

Если в определителе порядка n имеется столбец (строка), все элементы которого, кроме одного, равны нулю, то, разложив определитель по этому столбцу (строке), мы сведём его вычисление к вычислению определителя порядка $(n-1)$. Если же такого столбца (строки) нет, то, используя свойство 5) определителей, можно, не меняя значения данного определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранном столбце (строке) все элементы, кроме одного, обратились в нуль.

Пример 5. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы все элементы третьей строки, кроме одного, обратились в нуль. Для этого домножим третий столбец на -4 и добавим к первому, а затем домножим третий столбец на 2 и добавим ко второму.

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Обнулим в полученном определителе третьего порядка все элементы второй строки, кроме одного. Для этого домножим третий столбец нового определителя на -13 и 4 и добавим соответственно к первому и второму столбцам.

$$|A| = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = \\ = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 144 \cdot (10-11) = -144. \quad \square$$

Обратная матрица. Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратная матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю. Такие матрицы называются *невырожденными*. Невырожденная матрица A имеет единственную обратную

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Пример 6. Найти матрицу, обратную к данной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. В примере 3 было подсчитано, что $|A| = 5 \neq 0$. Значит, матрица A невырожденная и обратная существует. По формуле (4) находим

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности вычислений полезно убедиться, что для найденной матрицы в самом деле верно равенство

$$A \cdot A^{-1} = E. \quad \square$$

Невырожденные матрицы обладают следующими свойствами:

1) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$, 2) $(A^{-1})^{-1} = A$,

3) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$, 4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

5) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

Решение систем линейных уравнений. *Система линейных уравнений* имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты при неизвестных, b_i — свободные члены. Матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называются соответственно *матрицей и расширенной матрицей системы*.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система имеет либо одно, либо бесконечно много решений. В первом случае она называется *определённой*, а во втором — *неопределённой*. Система уравнений, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Рассмотрим метод Гаусса решения систем линейных уравнений на конкретном примере.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x - 2y + 3z = 17, \\ -2x - 3y - 5z = -9, \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Избавимся от переменной x во втором и третьем уравнениях. Для этого сначала домножим первое уравнение на -1 и прибавим ко второму, а потом домножим первое на 2 и прибавим к третьему.

$$\begin{cases} x - \ y + \ z = 6, \\ x - 2y + 3z = 17, \\ -2x - 3y - 5z = -9, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + \ z = 6, \\ -y + 2z = 11, \\ -5y - 3z = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + \quad z = 6, \\ -y + \ 2z = 11, \\ -\,13z = -52. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &z = 4, \\ &y = 2z - 11 = 8 - 11 = -3, \\ &x = 6 + y - z = 6 - 3 - 4 = -1. \end{aligned}$$

Для сокращения письма и придания решению большей наглядности можно проделать те же преобразования с расширенной матрицей системы:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 17 \\ -2 & -3 & -5 & -9 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -13 & -52 \end{array}\right). \qquad \square$$

Если обозначить матрицу системы через A, а столбец свободных членов и столбец переменных через B и X соответственно, то получится *матричный* вид системы линейных уравнений:

$$AX = B.$$

Домножив это равенство слева на A^{-1}, получим

$$X = A^{-1}B.$$

Это соотношение даёт нам новый способ решения систем линейных уравнений. Однако этот способ требует отыскания обратной матрицы и потому является менее эффективным, чем рассмотренный выше метод Гаусса.

Пример 8. Решить систему.

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + \ x_3 + 3x_4 = 2, \\ 11x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Поменяв местами первую и вторую строки, запишем расширенную матрицу системы. Затем исключим переменную x_3 из второго и третьего уравнения.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 10 \\ 11 & 9 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ -15 & -9 & 0 & -12 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как уравнение $0 = 0$ всегда верно, его можно просто отбросить. В итоге получим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &x_2 = -\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4, \\ &x_3 = -4x_1 - 3x_2 - 3x_4 + 2 = \\ &\quad = -4x_1 - 3\left(-\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4\right) - 3x_4 + 2 = x_1 + x_4 + 2. \end{aligned}$$

Положив $x_1 = 3a$ и $x_4 = 3b$, получим

$$x_1 = 3a, \quad x_2 = -5a - 4b, \quad x_3 = 3a + 3b + 2, \quad x_4 = 3b. \quad \square$$

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Пусть имеется n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идёт на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год). Введём следующие обозначения:

x_i — общий (валовый) объём продукции i-ой отрасли;

a_{ij} — *коэффициенты прямых затрат*, показывающие затраты продукции i-ой отрасли на производство единицы продукции j-ой отрасли;

y_i — объём конечного продукта i-ой отрасли для непроизводственного потребления.

Так как валовый объём продукции i-ой отрасли равен суммарному объёму её продукции, потребляемой всеми отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Уравнения (5) называются *соотношениями баланса.*

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого валового объёма продукции для каждой из отраслей, который при известных прямых затратах обеспечивает заданный конечный продукт. Для её решения достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений (5).

2 Аналитическая геометрия

Уравнения прямой. *Прямая* есть геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

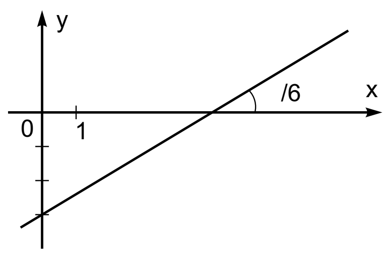
$$Ax + By + C = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0).$$

Если $B = 0$, то уравнение прямой принимает вид $x = -C/A$. В противном случае, деля обе части уравнения на B, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b,$$

где b — ордината точки пересечения прямой с осью OY, k — тангенс угла, образованного прямой с OX.

Пример 1. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$ и образующей с положительным направлением оси OX угол $\alpha = \pi/6$.



Р е ш е н и е. Так как $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\pi/6 = 1/\sqrt{3}$, то уравнение прямой принимает вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,x - 3. \qquad \square$$

Угол между прямыми.

$$y = k_1x + b_1, \qquad y = k_2x + b_2$$

вычисляется из формулы

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Отсюда же усматривается, что

$k_1 = k_2$ есть условие параллельности двух прямых;

$k_1 = -1/k_2$ есть условие перпендикулярности двух прямых.

Различные уравнения. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеет вид

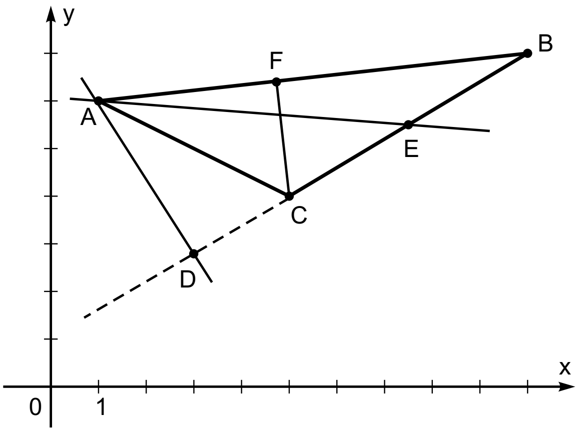
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

При этом угловой коэффициент такой прямой равен

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2}$$

Если $x_1 = x_2$, то прямая задаётся уравнением $x = x_1$. Если $y_1 = y_2$, то прямая задаётся уравнением $y = y_1$.

Пример 2. Даны вершины $A(1, 6)$, $B(10, 7)$ и $C(5, 4)$ треугольника ABC. Найти уравнение медианы AE.



Р е ш е н и е. Находим координаты точки E как середины отрезка BC.

$$E = \left(\frac{10 + 5}{2}, \frac{7 + 4}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{11}{2}\right).$$

Составляем уравнение прямой, проходящей через точки A и E (которая и является искомой медианой), по формуле (1).

$$\frac{y - 6}{\frac{11}{2} - 6} = \frac{x - 1}{\frac{15}{2} - 1}, \quad \frac{y - 6}{-\frac{1}{2}} = \frac{x - 1}{\frac{13}{2}}, \quad \frac{y - 6}{-1} = \frac{x - 1}{13},$$

$$13(y - 6) = -1(x - 1), \quad x + 13y - 79 = 0. \qquad \square$$

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{3}$$

Пример 3. В треугольнике ABC из примера 2 найти уравнение высоты AD.

Р е ш е н и е. По формуле (2) вычислим угловой коэффициент k_{BC} прямой BC.

$$k_{BC} = \frac{4 - 7}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

Тогда из условия перпендикулярности двух прямых следует, что

$$k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}.$$

По формуле (3) находим теперь искомое уравнение.

$$y - 6 = -\frac{5}{3}(x - 1), \quad 3(y - 6) = -5(x - 1), \quad 5x + 3y - 23 = 0, \ \square$$

Пересечение прямых. Для нахождения точки пересечения прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

достаточно решить систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если решение единственное, то прямые пересекаются. Если решений нет, то прямые параллельны. Если же решений бесконечно много, то прямые совпадают.

Расстояние от точки до прямой. Пусть даны точка $M(x_0, y_0)$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Тогда расстояние между ними определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{4}$$

Пример 4. В треугольнике ABC из примера 2 найти длину высоты CF.

Р е ш е н и е. По формуле (1) найдём уравнение прямой AB.

$$\frac{y - 6}{7 - 6} = \frac{x - 1}{10 - 1}, \quad \frac{y - 6}{1} = \frac{x - 1}{9},$$

$$9(y - 6) = 1(x - 1), \quad x - 9y + 53 = 0.$$

Таким образом, для прямой AB

$$A = 1, \quad B = -9, \quad C = 53,$$

и мы можем воспользоваться формулой (4).

$$CF = d = \frac{|1 \cdot 5 - 9 \cdot 4 + 53|}{\sqrt{1^2 + (-9)^2}} = \frac{|5 - 36 + 53|}{\sqrt{1 + 81}} = \frac{22}{\sqrt{82}}. \quad \square$$

3 Предел

Числовая последовательность. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что определена *числовая последовательность* x_1, x_2, $\ldots$, x_n, $\ldots$. Числа x_n, где $n \in \mathbb{N}$, называют *элементами* или *членами* последовательности. Числовую последовательность (в дальнейшем последовательность) будем ещё записывать в виде $\{x_n\}$, а выражение x_n называть *общим членом* последовательности, n — номером члена.

Последовательности встречались уже в средней школе, например, бесконечная геометрическая прогрессия 1, q, q^2, $\ldots$, q^n, $\ldots$, где $q < 1$ является числовой последовательностью.

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_ny_n\}$, $\{x_n/y_n\}$ называются соответственно *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$ для $n \in \mathbb{N}$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant M$.

В этом определении, а также в формулировках многих других определений и теорем используются слова «существует» и «для любого». Для краткости записи вместо этих терминов будем использовать символы соответственно $\exists$ и $\forall$. Символ $\exists$ называют *квантором существования*, а символ $\forall$ — *квантором общности*. С помощью указанных символов определение ограниченной последовательности выглядит следующим образом: последовательность x_n называется ограниченной, если $\exists\, M > 0$ такое, что $\forall\, n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leqslant M$.

Пример 1. Последовательность

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$$

ограничена, так как $\forall\ n \in \mathbb{N}\ |x_n| = 1/n \leqslant 1$.

Последовательность

$$1,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

является неограниченной, так как каково бы ни было число $M > 0$ найдётся такое $x_n = n^2$, что $x_n > M$.

Предел последовательности. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall\ n > N_0\ |x_n - a| < \varepsilon$. Для обозначения предела используется выражение

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*.

Например,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

так как при возрастании n выражение $1/n$ становится как угодно малым.

Приведем основные свойства сходящихся последовательностей.

1) Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

2) Сходящаяся последовательность ограничена. Однако ограниченная последовательность не обязательно сходится. Например, последовательность

$$1,\ -1,\ 1,\ \ldots,(-1)^{n-1},\ldots$$

ограниченна, но расходится.

3) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ (при условии, что $b \neq 0$).

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{n^2-1}$.

Р е ш е н и е. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности. Следовательно, непосредственно применить свойство о пределе частного нельзя. Поэтому необходимо преобразовать общий член этой последовательности, разделив числитель и знаменатель на n^2 (на n в максимальной степени). Получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0+0}{1-0} = 2. \qquad \square$$

Понятие функции. При изучении явлений природы, физических, экономических и др. процессов часто встречаются с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин полностью определяют значения других. Например, площадь круга S однозначно определяется значением его радиуса с помощью формулы $S = \pi r^2$.

Пусть X и Y — два произвольных множества действительных чисел $X \subset R$, $Y \subset R$. Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие определенный элемент y из множества Y, то говорят, что задана *функция* f. Для функции используется обозначение $y = f(x)$.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом* функции, переменная y — *зависимой переменной* или значением функции. Множество X называют *областью определения* функции f. Множество всех значений $y = f(x)$ $(x \in X)$ называется *множеством значений* функции. Например, функция $y = \sqrt{1-x^2}$ определена на отрезке $[-1;1]$, т.е. областью определения является множество $X = [-1;1]$. Множеством значений функции в данном случае является отрезок $Y = [0;1]$.

Функция, все значения которой равны между собой, называется постоянной. Постоянную функцию часто обозначают буквой C.

Функция f, определенная на множестве X, называется ограниченной, если $\exists\ M > 0$ такое, что

$$\forall\ x \in X \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Например, функция $y = \cos x$ является ограниченной на $\mathbb{R}$, так как

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad |\cos x| \leqslant 1,$$

а функция $y = \operatorname{tg} x$ не является ограниченной на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, так как не существует числа $M > 0$ такого, чтобы

$$\forall\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad |\operatorname{tg} x| \leqslant M.$$

Предел функции. Число b называется *пределом функции* f в точке $x = a$ (или при $x \to a$), если для любой последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_k)\}$ сходится к b. Для обозначения предела функции f в точке $x = a$ используется формула

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Приведем основные свойства пределов функций. Пусть функции f и g имеют в точке a пределы b и c:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

Тогда

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = b \pm c$,

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = bc$,

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (при условии $c \neq 0$).

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Р е ш е н и е. Так как

$$\lim_{x\to 0}(x+2) = \lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} 2 = 0 + 2 = 2 \neq 0,$$

то предел знаменателя не равен нулю, и, следовательно, применимо свойство 3). Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x^2 + \lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} 2} =$$

$$= \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$.

Р е ш е н и е. Поскольку

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x-2) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 2 = 1 + 1 - 2 = 0,$$

то свойство предела частного здесь применить нельзя. Однако заметим, что и

$$\lim_{x\to 1}(x^3-1) = \lim_{x\to 1} x^3 - \lim_{x\to 1} 1 = 1 - 1 = 0.$$

Говорят, что здесь имеем неопределённость вида $0/0$. Так как при рассмотрении предела функции в точке $x=1$ ее аргумент принимает значения близкие к единице, но не равные ей, то

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+2}=\frac{3}{3}=1.\quad\square$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+x+1}{x^2+9}$.

Решение. Числитель и знаменатель в отдельности при $x\to\infty$ неограниченно возрастают (неопределённость ∞/∞). Поэтому непосредственно перейти к частному пределов на основании свойств предела нельзя. Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела. Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, т.е. в данном случае, x^2. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+x+1}{x^2+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}}=\frac{9+0+0}{1+0}=9.\quad\square$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+2}{11x^2+5x+3}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+2}{11x^2+5x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{11}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}.$$

В этом выражении предел знаменателя равен нулю, в то время как предел числителя нулю не равен. В таких случаях считают, что предел всей дроби равен бесконечности. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+2}{11x^2+5x+3}=\frac{2+0+0}{0+0+0}=\infty.\quad\square$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$.

Решение. Получим в числителе разность квадратов.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+13}-4\right)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}=$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+13)-16}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}=$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}=$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}=\frac{1}{(3+3)\left(\sqrt{3+13}+4\right)}=$$
$$=\frac{1}{6\cdot(4+4)}=\frac{1}{48}.\quad\square$$

Замечательные пределы. Первым замечательным пределом называется следующее равенство

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Приводимые ниже пределы являются его следствиями

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\quad\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sin8x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sin8x}=\lim_{x\to0}\frac{4x\dfrac{\sin4x}{4x}}{8x\dfrac{\sin8x}{8x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin4x}{4x}}{\dfrac{\sin8x}{8x}}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{4x}}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin8x}{8x}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1}=\frac{1}{2}.\quad\square$$

Второй замечательный предел задаётся равенством

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad e=2{,}71828\ldots\ .$$

Его следствия:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида 1^∞, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{2x-1}=1,\quad\lim_{x\to\infty}4x=\infty.$$

Выделяя у дроби целую часть, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1-2}{2x-1}\right)^{4x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x-1}\right)^{4x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-2}\,\frac{-2}{2x-1}\,4x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{2x-1}\,4x}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{-0}{2-0}=0,$$

то выражение в больших скобках стремится к числу e и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{2x-1}4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x}{2x-1}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8}{2-1/x}}=e^{\frac{-8}{2-0}}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}.\quad\square$$

Число e имеет экономическую интерпретацию. При непрерывном начислении процентов зависимость суммы вклада в банке $S(t)$ от времени t имеет вид

$$S(t)=S_0e^{pt},$$

где S_0 начальная величина вклада в момент $t=0$, p параметр определяющий скорость роста вклада.

4 Теория дифференцирования

Понятие производной. Если мы хотим получить представление, как быстро изменяется значение функции при изменении независимого переменного в окрестности точки x, то должны сопоставить или сравнить каким-то образом приращение аргумента Δx и приращение функции Δy. С целью более глубокого изучения функции, исследования скорости изменения ее значений вводится понятие производной — одно из важнейших понятий математики.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. Для обозначения производной используется символ $f'(x)$. Таким образом, по определению

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.\tag{1}$$

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

Пример 1. Найти производную функции $f(x)=x^2$.

Р е ш е н и е. Находим приращение функции.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$$
$$=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Находим предел (1).

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x+0=2x.$$

То есть

$$(x^2)'=2x. \qquad \square$$

Если такую же операцию проделать со всеми основными элементарными функциями, то получится следующая таблица производных.

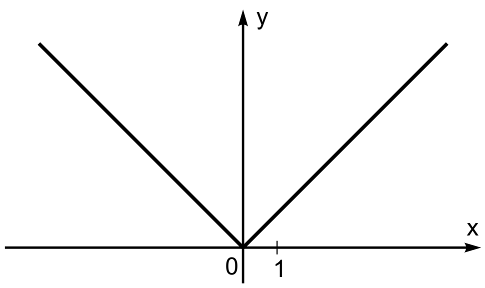
1) $c'=0$,	2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$,
3) $(a^x)'=a^x\ln a$,	4) $(\log_\alpha x)=\dfrac{1}{x\ln a}$,
5) $(\sin x)'=\cos x$,	6) $(\cos x)'=-\sin x$,
7) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$,	8) $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
9) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	10) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
11) $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,	12) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

Из 2) в частности следует, что

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}\,x^{1/2-1}=\frac{1}{2}\,x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-1\,x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

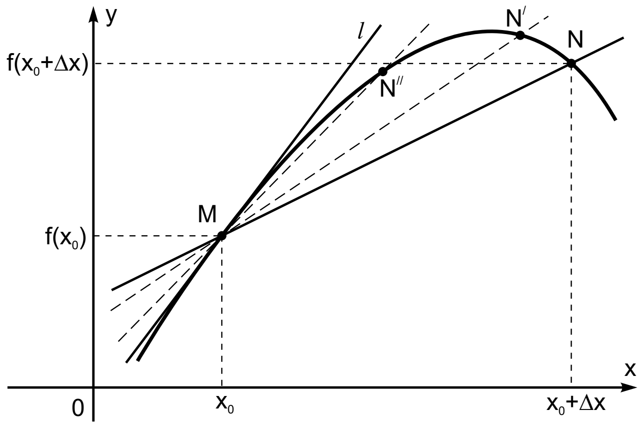
Так как $\ln e=1$, то из 3) и 4) следует, что

$$(e^x)'=e^x, \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$



Производная не всегда существует. Например, если $M\big(x_0,f(x_0)\big)$ является угловой точкой графика функции $y=f(x)$, то у функции $f(x)$ нет производной в точке x_0. Рассмотрим функцию $y=|x|$. Для неё начало координат является угловой точкой. Следовательно, у данной функции нет производной при $x=0$. Строго говоря, производная не существует, если предел (1) не существует или равен бесконечности.

Задачи, приводящие к понятию производной. Начнём с геометрического смысла. Рассмотрим график некоторой функции $y=f(x)$ (см. рис.). Пусть $M\big(x_0,f(x_0)\big)$ — какая-либо точка графика. Придадим аргументу приращение Δx. Соответствующую точку на графике обозначим через $N\big(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x)\big)$. Через точки M и N проведем прямую и назовем ее секущей. Если точку N устремить по графику к точке M, то положение секущей будет, вообще говоря, изменяться, и ее предельное положение называется *касательной* к кривой $y=f(x)$ в точке M.



Угловой коэффициент секущей MN равен

$$k_{MN}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если устремить приращение аргумента Δx к нулю, то угловой коэффициент секущей MN будет стремиться к угловому коэффициенту k касательной l, то есть

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}k_{MN}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Таким образом искомая касательная проходит через точку $M\big(x_0,f(x_0)\big)$, и её угловой коэффициент равен $f'(x_0)$. Поэтому её уравнение имеет вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{2}$$

Перейдём к физическому смыслу производной. Пусть некоторая материальная точка M движется прямолинейно и задан закон её движения $s=s(t)$, то есть известно расстояние $s(t)$ от точки M до некоторой начальной точки отсчета в каждый момент времени t. В момент времени t_0 точка пройдет расстояние $s(t_0)$, а в момент времени $t_0+\Delta t$ — расстояние $s(t_0+\Delta t)$. За промежуток времени Δt точка M пройдет расстояние

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0).$$

Отношение $\Delta s/\Delta t$ можно рассматривать как среднюю скорость движения за время Δt. Чем меньше этот промежуток времени, тем точнее средняя скорость будет характеризовать движение точки в момент времени t_0. Поэтому предел средней скорости движения при $\Delta t\to 0$ называют *скоростью движения* (или *мгновенной скоростью движения*) точки M в момент времени t_0 и обозначают $v(t_0)$, то есть

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=s'(t_0).$$

Таким образом, скорость движения есть производная от пройденного расстояния по времени.

Рассмотрим экономический смысл производной. Пусть $u=u(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t на некотором предприятии. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u(t_0)$ до значения $u(t_0+\Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за период времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ будет равна

$$z_{\text{ср}}=\frac{u(t_0+\Delta t)-u(t_0)}{\Delta t}.$$

Производительность труда z в момент времени t_0 есть предельное значение средней производительности при $t\to t_0$,

$$z=\lim_{\Delta t\to 0}z_{\text{ср}}=u'(t_0).$$

Правила дифференцирования. Следующие правила применяются для дифференцирования функций, не вошедших в таблицу производных.

1) $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$,

2) $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$,

3) $\big(f(x)\,g(x)\big)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$,

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$,

5) $\Big(f\big(u(x)\big)\Big)' = f'\big(u(x)\big)\,u'(x)$.

Правило 5) позволяет находить производные сложных функций.

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = x^2 \sin x$.

Решение. По правилу 3)

$$f'(x) = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x. \quad \square$$

Пример 3. Найти производную функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^{x^3 \cos 2x}.$$

Решение. Пользуемся правилом 5) для производной сложной функции.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(e^{x^3 \cos 2x}\right)^2} \left(e^{x^3 \cos 2x}\right)' = \\ &= \frac{1}{1 + e^{2x^3 \cos 2x}}\, e^{x^3 \cos 2x} \left(x^3 \cos 2x\right)' = \\ &= \frac{e^{x^3 \cos 2x}}{1 + e^{2x^3 \cos 2x}} \Big((x^3)' \cos 2x + x^3 (\cos 2x)'\Big) = \\ &= \frac{e^{x^3 \cos 2x}}{1 + e^{2x^3 \cos 2x}} \Big(3x^2 \cos 2x + x^3(-\sin 2x)(2x)'\Big) = \\ &= \frac{e^{x^3 \cos 2x}}{1 + e^{2x^3 \cos 2x}} \Big(3x^2 \cos 2x - 2x^3 \sin 2x\Big). \quad \square \end{aligned}$$

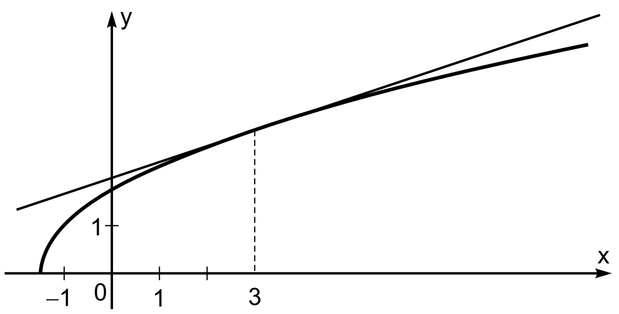
Пример 4. Составить уравнение касательной к кривой

$$y = \sqrt{2x + 3}$$

в точке $x = 3$.

Решение. Находим производную данной функции.

$$f'(x) = y' = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\,(2x+3)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$



Уравнение касательной составляем по формуле (2).

$$y - f(3) = f'(3)(x-3), \quad y - \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3 + 3}}(x-3),$$

$$y - 3 = \frac{1}{3}\,(x-3), \quad y - 3 = \frac{x}{3} - 1, \quad y = \frac{x}{3} + 2. \quad \square$$

Дифференциал функции. Как мы уже знаем, производная функции $y = f(x)$ определяется по формуле

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Поэтому при малых значениях Δx

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x.$$

Правую часть последнего выражения принято называть *дифференциалом* функции y в точке x:

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

При малых Δx дифференциал dy приближённо равен приращению функции Δy.

Рассмотрим функцию $y = x$. Для неё

$$dy = dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Таким образом, $dx = \Delta x$. Поэтому выражение дифференциала можно записать в виде

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Пример 5. Найти дифференциал функции $y = \sin^5 3x$.

Решение. Находим производную.

$$y' = 5 \sin^4 3x (\sin 3x)' = 5 \sin^4 3x \cos 3x (3x)' = 15 \sin^4 3x \cos 3x.$$

Тогда

$$dy = y'\,dx = 15 \sin^4 3x \cos 3x\,dx. \quad \square$$

Производные высших порядков. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке $x \in (a, b)$. Тогда на промежутке (a, b) будет определена функция $f'(x)$, и тоже можно говорить о её производной. Назовем $f'(x)$ производной первого порядка функции $f(x)$. Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$, если она существует. Обозначается вторая производная символами y'' или $f''(x)$.

Производную от второй производной называют производной третьего порядка функции $f(x)$ и обозначают y''' или $f'''(x)$. Производная n-го порядка является производной от производной $(n-1)$-го порядка. Производная n-го порядка обозначается $y^{(n)}$ либо $f^{(n)}(x)$.

Рассмотрим физический смысл второй производной. Как мы уже знаем, первая производная пути по времени есть скорость. Тогда вторая производная — это скорость изменения скорости, то есть ускорение.

Пример 6. Вычислить третью производную функции

$$f(x) = x^3 e^{2x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' e^{2x} + x^3 (e^{2x})' = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} = \\ &= (3x^2 + 2x^3) e^{2x}, \\ f''(x) &= (6x + 6x^2) e^{2x} + (3x^2 + 2x^3) 2e^{2x} = \\ &= 2(2x^3 + 6x^2 + 3x) e^{2x}, \\ f'''(x) &= 2(6x^2 + 12x + 3) e^{2x} + 2(2x^3 + 6x^2 + 3x) 2e^{2x} = \\ &= 2(2x^3 + 12x^2 + 15x + 3) e^{2x}. \quad \square \end{aligned}$$

Правило Лопиталя. Правило Лопиталя даёт простой и эффективный способ раскрытия неопределённостей вида $0/0$ или ∞/∞ при вычислении пределов.

Теорема 1 (Правило Лопиталя). *Пусть*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

либо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если последний предел существует.

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to 0} x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \ln x = \infty,$$

то имеем неопределённость вида $0\cdot\infty$. Чтобы применить правило Лопиталя, преобразуем её к виду ∞/∞.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0. \qquad \square$$

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределённость вида ∞/∞. Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x\ln 2}{3x^2}.$$

Мы снова получили неопределённость вида ∞/∞. Применим правило Лопиталя ещё раз. И будем делать это до тих пор, пока не исчезнет неопределённость.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x\ln^2 2}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x\ln^3 2}{6} = \frac{\infty}{6} = \infty. \qquad \square$$

Монотонность и экстремум функции. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке (a,b), если для всяких x_1, x_2 из (a,b) таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке (a,b), если для всяких x_1, x_2 из (a,b) таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Если функция возрастает или убывает на промежутке (a,b), то говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

Теорема 2 (Условие возрастания функции). *Если $f'(x) \geqslant 0$ на промежутке (a,b), то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке.*

Теорема 3 (Условие убывания функции). *Если $f'(x) \leqslant 0$ на промежутке (a,b), то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.*

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно *максимумом* и *минимумом* функции. Максимум и минимум функции объединяются общим названием *экстремума* функции. Понятие экстремума имеет огромное значение для прикладных дисциплин, таких как физика или экономика.

Экстремум функции часто называют *локальным экстремумом*, подчёркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_0. Так что на одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причём может случиться что минимум в одной точке больше максимума в другой.

Назовём *стационарными* точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю или не существует.

Теорема 4 (Необходимое условие экстремума). *Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то эта точка стационарная для функции $f(x)$.*

Однако заметим, что не всякая стационарная точка является точкой экстремума. Таким образом, для нахождения экстремумов требуется дополнительное исследование стационарных точек.

Теорема 5 (Достаточное условие экстремума). *Если при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $f(x)$, а если с минуса на плюс, — то точка минимума.*

Для решения прикладных задач важно уметь находить *наибольшее* и *наименьшее значения* (*глобальный максимум и минимум*) функции на отрезке $[a,b]$.

Глобальный максимум или минимум могут достигаться либо на концах отрезка $[a,b]$ либо в точках экстремума. А каждая точка экстремума, как мы уже знаем, является стационарной. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ удобно пользоваться следующей схемой:

1) найти $f'(x)$;
2) найти стационарные точки функции $f(x)$ на интервале (a,b);
3) найти значения функции в стационарных точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее $f_{\max}$ и наименьшее $f_{\min}$.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 5(x-1)^2e^{-x}$ на отрезке $[0,5]$.

Решение. 1) Находим производную

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10(x-1)e^{-x} + 5(x-1)^2e^{-x}(-1) = \\ &= 5e^{-x}\big(2(x-1) - (x-1)^2\big) = \\ &= 5e^{-x}(x-1)\big(2-(x-1)\big) = -5e^{-x}(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

2) $f'(x)$ обращается в нуль в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Это и есть стационарные точки.

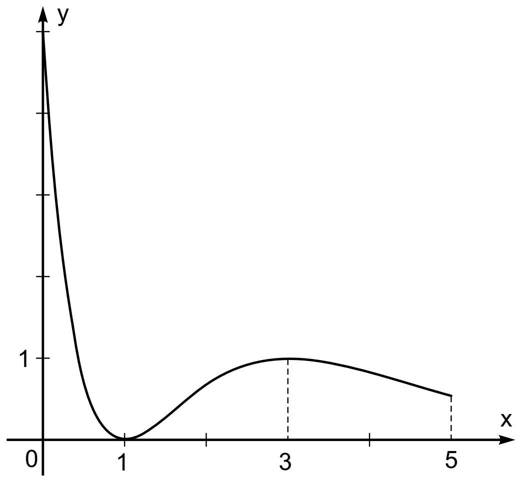
3) Находим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка $[0,5]$.

$$f(1) = 0, \quad f(3) = \frac{20}{e^3}, \quad f(0) = 5, \quad f(5) = \frac{80}{e^5}.$$

Итак, $f_{\min} = f(1) = 0$ и $f_{\max} = f(0) = 5$. $\square$

Исследование функций и построение их графиков. При исследовании функций и построении их графиков полезно придерживаться следующей схемы:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на чётность—нечётность;
3) найти пределы функции в граничных точках области определения;
4) в случае бесконечной области определения найти предел функции в бесконечности;



5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;

6) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Пример 10. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{4\,e^{-x^2-2x}}{4x-5}$ и построить её график.

Решение. 1) Знаменатель обращается в нуль при $x = 5/4$. Поэтому область определения функции $f(x)$

$$\left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \bigcup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right).$$

2) Функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной.

3) Найдём пределы функции $f(x)$ при x стремящемся к $5/4$ слева (коротко обозначается $x \to 5/4 - 0$) и справа (обозначается $x \to 5/4 + 0$).

$$\lim_{x\to 5/4-0} f(x) = \frac{4\,e^{-25/16-5/2}}{-0} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 5/4+0} f(x) = \frac{4\,e^{-25/16-5/2}}{+0} = +\infty.$$

4) Найдём пределы при x стремящемся к $-\infty$ и $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{4\,e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{4\cdot 0}{-\infty} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{4\,e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{4\cdot 0}{+\infty} = 0,$$

5) Вычислим производную.

$$f'(x) = 4\,\frac{e^{-x^2-2x}(-2x-2)(4x-5) - e^{-x^2-2x}\cdot 4}{(4x-5)^2} =$$
$$= 4\,\frac{e^{-x^2-2x}(-8x^2+2x+6)}{(4x-5)^2}.$$

Находим нули производной.

$$-8x^2+2x+6 = 0, \quad x = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{-8} = \frac{-1\pm 7}{-8}.$$

То есть $x_1 = -3/4$, $x_2 = 1$.

Интервалы монотонности функции совпадают с промежутками знакопостоянства производной, которые, в свою очередь, лежат между стационарными точками и точками, где функция не существует. Для изучения поведения функции и её производной в таких точках и интервалах построим следующую таблицу.

x	$(-\infty, -\frac{3}{4})$	$-\frac{3}{4}$	$(-\frac{3}{4}, 1)$	1	$(1, \frac{5}{4})$	$\frac{5}{4}$	$(\frac{5}{4}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\approx -1{,}3$	$\nearrow$	$\approx -0{,}2$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

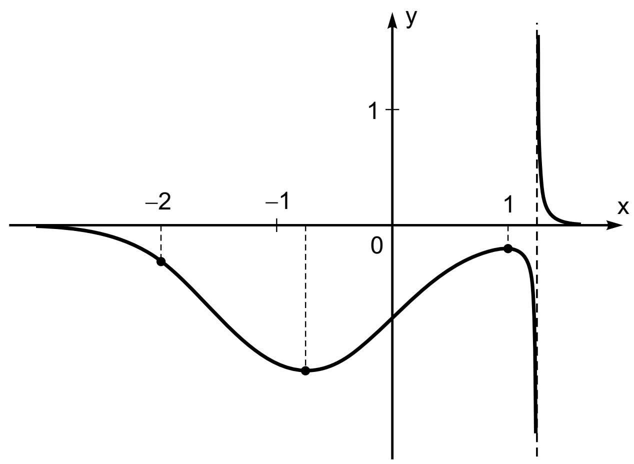
Здесь стрелка $\nearrow$ обозначает возрастание, а $\searrow$ — убывание функции.

6) Находим точки пересечения с осями координат. Уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений.

$$f(0) = \frac{4e^0}{-5} = -\frac{4}{5} = -0{,}8.$$

Находим дополнительные точки.

$$f(-3) \approx -0{,}01, \quad f(-2) \approx -0{,}3, \quad f(1{,}5) \approx 0{,}02.$$



По результатам исследования строим график. □

Понятие эластичности функции. Большое значение в экономике имеет понятие эластичности функции. Эластичностью функции $y = f(x)$ относительно переменной x называется величина

$$E_x(y) = \frac{x}{f(x)}\,f'(x). \tag{3}$$

Эластичность функции характеризует процент прироста зависимой переменной, соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

Пример 11. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млн. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение. По определению (3)

$$E_x(y) = \frac{x}{-0{,}5x+80}\,(-0{,}5) = \frac{x}{x-160}\,.$$

Тогда

$$E_{x=60}(y) = \frac{60}{60-160} = -0{,}6\,,$$

то есть при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведёт к снижению себестоимости на 0,6%. □

5 Неопределённый интеграл

Первообразная и неопределённый интеграл. Основной операцией дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Однако, естественно, возникает вопрос о существовании операции, обратной дифференцированию. Восстановление функции по известной производной этой функции есть основная задача интегрального исчисления.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ если

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = x^5/5$ является первообразной для функции $f(x) = x^4$, так как

$$F'(x) = \frac{1}{5}(x^5)' = x^4 = f(x).$$

Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$, так как

$$F'(x) = -(\cos x)' = \sin x = f(x).$$

Задача об отыскании первообразной по данной функции $f(x)$ решается неоднозначно. Если, например, $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$. Действительно,

$$\big(F(x)+C\big)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Более того, можно доказать, что множество функций вида $F(x)+C$ описывает все первообразные для данной функции $f(x)$. Таким образом, если известна хотя бы одна первообразная для данной функции $f(x)$, то известно и всё множество первообразных для этой функции.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, переменная x — *переменной интегрирования*.

Итак, если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Отыскание неопределенного интеграла по подынтегральной функции называется интегрированием этой функции.

Например,

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Свойства неопределённого интеграла. Приведем таблицу основных интегралов. Формулы этой таблицы можно проверить дифференцированием их правой части.

1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$, 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

3) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$, 3′) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$,

4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, 5) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$,

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (-a < x < a,\ a > 0)$,

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$,

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$,

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad (a \neq 0)$.

Рассмотрим теперь основные свойства неопределённого интеграла.

1) Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$$

3) Интеграл от суммы равен сумме интегралов.

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Пример 1. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой 1) из таблицы основных интегралов.

$$I = \int x^{-1/3}\,dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C. \quad \square$$

Пример 2. Найти интеграл

$$I = \int 2^{3x-1}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой 3).

$$I = \int 2^{3x} \cdot 2^{-1}\,dx = \frac{1}{2}\int 8^x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{8^x}{\ln 8} + C. \quad \square$$

Пример 3. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{4x^2 + 25}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой 9).

$$I = \int \frac{1}{4}\,\frac{dx}{x^2 + 25/4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + (5/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{5/2}\operatorname{arctg}\frac{x}{5/2} + C = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5} + C. \quad \square$$

Пример 4. Найти интеграл

$$I = \int \frac{\big(2\sqrt{x} + 1\big)^3}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Разложим числитель по формуле куба суммы.

$$I = \int \frac{8x^{3/2} + 12x + 6x^{1/2} + 1}{x^{3/2}}\,dx =$$

$$= \int \left(8 + 12x^{-1/2} + 6x^{-1} + x^{-3/2}\right) dx =$$

$$= 8\int dx + 12\int x^{-1/2}\,dx + 6\int \frac{dx}{x} + \int x^{-3/2}\,dx =$$

$$= 8x + 12\,\frac{x^{1/2}}{1/2} + 6\ln|x| + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C =$$

$$= 8x + 24\sqrt{x} + 6\ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C. \quad \square$$

Метод замены переменной. Метод замены переменной часто позволяет свести неизвестный интеграл к табличному.

Пример 5. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{1 - 2x}.$$

Р е ш е н и е. Положим $t = 1 - 2x$. Тогда

$$x = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}, \qquad dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)' dt = -\frac{dt}{2},$$

и

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{2}}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C.$$

Теперь нужно вернуться к исходной переменной. Тогда

$$I = -\frac{1}{2}\ln|1 - 2x| + C. \quad \square$$

Пример 6. Найти интеграл

$$I = \int xe^{-x^2}\,dx.$$

Решение. Положим $t = -x^2$. Тогда

$$dt = (-x^2)'\,dx = -2x\,dx, \qquad x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt.$$

В данном случае нет необходимости выражать переменную x через t, поскольку при замене $-x^2$ на t и $x\,dx$ на $-1/2\,dt$ переменная x больше не будет входить в подынтегральное выражение. В самом деле

$$I = \int e^t \left(-\frac{1}{2}\,dt\right) = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = \\ = -\frac{1}{2}\,e^t + C = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + C. \qquad \square$$

Пример 7. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Положим $t = 1 - x^2$. Тогда

$$dt = (1-x^2)'dx = -2x\,dx, \qquad x\,dx = -\frac{dt}{2}\,,$$

и

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = \\ = -\frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \qquad \square$$

Пример 8. Найти интеграл

$$I = \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx.$$

Решение. Положим $t = \ln x$. Тогда

$$dt = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}\,dx = \frac{dx}{x}\,,$$

и

$$I = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \\ = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\,\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}\,\sqrt{\ln^3 x} + C. \qquad \square$$

Метод интегрирования по частям. Формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

называется *формулой интегрирования по частям*. Эта формула оказывается полезной при вычислении интегралов следующих двух видов:

I. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx, \quad \int x^n \sin mx\,dx, \quad \int x^n \cos mx\,dx;$

II. $\displaystyle\int x^k \ln^n x\,dx, \quad \int x^k \arcsin x\,dx, \quad \int x^k \arccos x\,dx,$
$\displaystyle\int x^k \operatorname{arctg} x\,dx, \quad \int x^k \operatorname{arcctg} x\,dx.$

Рассмотрим примеры интегралов из I группы.

Пример 9. Найти интеграл

$$I = \int xe^{-2x}\,dx.$$

Решение. Применим к этому интегралу формулу интегрирования по частям. Для этого положим

$$u = x, \qquad dv = e^{-2x}\,dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int e^{-2x}\,dx = \frac{e^{-2x}}{-2} = -\frac{1}{2}\,e^{-2x}, \qquad du = dx.$$

Вычисляя интеграл в последней формуле мы не выписывали произвольную постоянную C, поскольку здесь нам было нужно не всё множество первообразных, а какая-нибудь одна из них.

Тогда имеем

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \\ = x\left(-\frac{1}{2}\,e^{-2x}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\,e^{-2x}\right)dx = \\ = -\frac{1}{2}\,xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\,xe^{-2x} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx + C = \\ = -\frac{1}{2}\,xe^{-2x} - \frac{1}{4}\,e^{-2x}\,dx + C. \qquad \square$$

Пример 10. Найти интеграл

$$I = \int x^2 \sin x\,dx.$$

Решение. Положим

$$u = x^2, \qquad dv = \sin x\,dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int \sin x\,dx = -\cos x, \quad du = (x^2)'dx = 2x\,dx,$$

и

$$I = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x)\,2x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx.$$

Чтобы вычислить

$$\int x\cos x\,dx$$

снова применим формулу интегрирования по частям. Положим

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x, \quad du = dx,$$

и

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

В результате

$$I = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + 2C. \qquad \square$$

Рассмотрим теперь интеграл из II группы.

Пример 11. Найти интеграл

$$I = \int x\ln x\,dx.$$

Решение. Положим

$$u = \ln x, \qquad dv = x\,dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}, \quad du = (\ln x)'\,dx = \frac{1}{x}\,dx,$$

и

$$I = \ln x\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \\ = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{x^2}{4} + C. \qquad \square$$

Интегрирование тригонометрических функций.

Пример 12. Найти интеграл

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Положим $t = \cos x$. Тогда

$$\begin{gathered} dt = (\cos x)'dx = -\sin x\,dx, \\ \sin^3 x\,dx = \sin^2 x(\sin x\,dx) = (1-\cos^2 x)(-dt) = \\ = (1-t^2)(-dt) = (t^2-1)\,dt\,, \end{gathered}$$

и

$$I = \int \frac{t^2-1}{t^4}\,dt = \int t^{-2}\,dt - \int t^{-4}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-3}}{-3} + C = \\ = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \qquad \square$$

Для нахождения многих интегралов оказываются полезными формулы, преобразующие произведение тригонометрических функций в сумму:

$$\begin{gathered} \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big), \\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\Big), \\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big), \\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \end{gathered}$$

Пример 13. Найти интеграл

$$I = \int \sin 3x \cos 5x\,dx.$$

Р е ш е н и е. По рассмотренным выше формулам

$$\sin 3x\cos 5x = \frac{1}{2}\Big(\sin 8x + \sin(-2x)\Big) = \frac{1}{2}\,\sin 8x - \frac{1}{2}\,\sin 2x.$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{2}\int \sin 8x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \\ = \frac{1}{2}\,\frac{-\cos 8x}{8} - \frac{1}{2}\,\frac{-\cos 2x}{2} + C = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C. \square$$

6 Определённый интеграл

Понятие определённого интеграла. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. Рассмотрим фигуру (см. рис.), ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Её называют *криволинейной трапецией*. Поставим задачу об определении и вычислении площади этой криволинейной трапеции.

Отрезок $[a,b]$ разобьём на n произвольных частей точками:

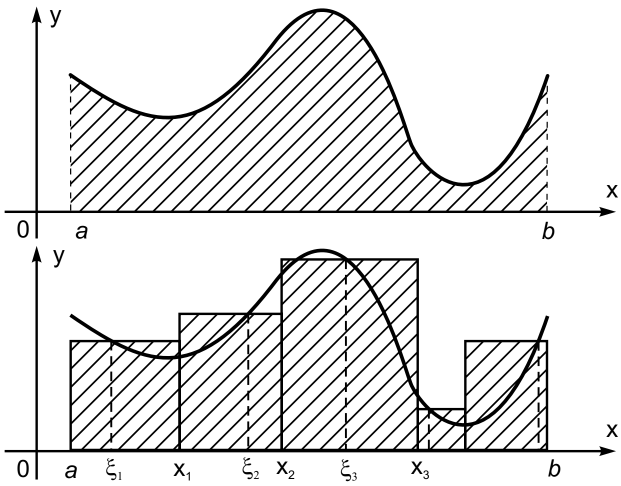
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Через точки x_k проведём прямые, параллельные оси Oy. Криволинейная трапеция разобьется на n частичных криволинейных трапеций. Теперь на каждом из отрезков $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ..., $[x_{n-1},x_n]$ произвольно выберем по точке ξ_k,

$$\xi_k \in [x_{k-1},x_k] \quad (k = 1,2,\ldots,n).$$

Вычислим значение $f(\xi_k)$. И каждую частичную криволинейную трапецию заменим прямоугольниками с высотами $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$. Тогда можно полагать, что для площади S криволинейной трапеции справедливо соотношение

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$



Естественно предположить, что это равенство будет тем точнее, чем меньше максимум длин отрезков разбиения

$$\lambda = \max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1}).$$

Поэтому площадь криволинейной трапеции S равна

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \qquad (1)$$

Число S, равное пределу (1), называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к введению понятия определённого интеграла.

Основные свойства определённого интеграла.

1) При перемене местами пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

2) Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всём отрезке равен сумме интегралов по каждой из частей.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

3) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

4) Интеграл от суммы равен сумме интегралов.

$$\int\limits_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Формула Ньютона—Лейбница. Если $F(x)$ — произвольная первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Таким образом, формула Ньютона—Лейбница сводит вычисление определённого интеграла к вычислению разности значений любой её первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Эта формула считается основной формулой интегрального исчисления.

Разность $F(b) - F(a)$ для удобства обозначают $F(x)\big|_a^b$. Поэтому формулу Ньютона—Лейбница можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b.$$

Пример 1. Вычислить

$$I = \int_0^1 x^2\,dx.$$

Решение. По формуле Ньютона—Лейбница

$$I = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

Замена переменной в определённом интеграле. Замена переменной осуществляется точно так же, как и в неопределённом интеграле с двумя различиями:

1) при замене следует пересчитывать пределы интегрирования;

2) не нужно возвращаться к старой переменной.

Пример 2. Вычислить

$$I = \int_0^1 x(2-x^2)^5\,dx.$$

Решение. Положим $t = 2 - x^2$. Тогда

$$dt = (2-x^2)'dx = -2x\,dx, \qquad x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt,$$
$$x = 0 \Rightarrow t = 2 - 0^2 = 2, \qquad x = 1 \Rightarrow t = 2 - 1^2 = 1.$$

Поэтому

$$I = \int_2^1 t^5\left(-\frac{1}{2}\,dt\right) = -\frac{1}{2}\int_2^1 t^5\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 t^5\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^6}{6}\bigg|_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^6}{6} - \frac{1^6}{6}\right) = \frac{1}{12}(2^6 - 1) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}. \qquad \square$$

Формула интегрирования по частям. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла принимает вид:

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример 3. Вычислить

$$I = \int_1^2 \ln x\,dx.$$

Решение. Положим

$$u = \ln x, \qquad dv = dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int dx = x, \qquad du = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}\,dx.$$

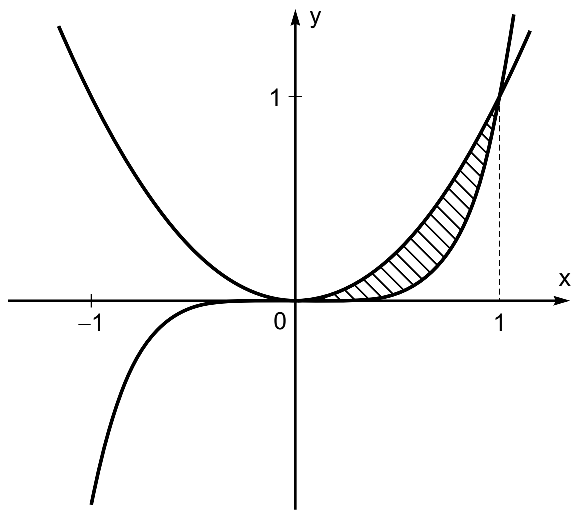
Поэтому

$$I = (x\ln x)\big|_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{1}{x}\,dx = 2\ln 2 - 1\ln 1 - \int_1^2 dx =$$
$$= 2\ln 2 - x\big|_1^2 = \ln 2^2 - (2-1) = \ln 4 - 1. \qquad \square$$

Вычисление площадей плоских фигур. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ такие, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключённой между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, на отрезке $[a,b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \Big(f_2(x) - f_1(x)\Big)\,dx.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x^5$.



Решение. Находим точки пересечения данных кривых.

$$x^2 = x^5, \quad x^2 - x^5 = 0, \quad x^2(1-x^3) = 0,$$

Отсюда

$$x_1 = 0, \qquad 1 - x_2^3 = 0, \quad x_2^3 = 1, \quad x_2 = \sqrt[3]{1} = 1.$$

На отрезке $[0,1]$ $x^5 \leqslant x^2$. Поэтому

$$S = \int_0^1 (x^2 - x^5)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^5\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 - \frac{x^6}{6}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \qquad \square$$