# С о д е р ж а н и е

# Глава 1
# Введение в методы оптимизации

Целью данной главы является напоминание основных фактов из базового курса математического анализа, которые необходимы для понимания приложений математических методов для решения экономических задач.

## 1.1. Функция спроса и ее эластичность

В этом параграфе мы подробно остановимся на функции спроса и экономическом смысле понятия эластичности.

Функция спроса $D(p)$ (demand) определяет спрос (количество купленного товара) при цене $p$ за единицу продукции. Понятие эластичности было введено Аланом Маршаллом в связи с изучением свойств функции $D(p)$.

**Определение 1.1.** ***Эластичностью*** *$E_D$ спроса $D(p)$ называется относительное изменение спроса $\frac{\Delta D}{D}$ при относительном изменении $\frac{\Delta p}{p}$ цены товара:*

$$E_D = \frac{\frac{\Delta D}{D} \cdot 100\%}{\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%} \tag{1.1}$$

Если функция спроса является дифференцируемой, то под эластичностью понимается предел правой части формулы (1.1) при $\Delta p \to 0$. Тогда эластичность $E_D$ спроса вычисляется по формуле

$$E_D = \frac{D'}{D} \cdot p = \left(\ln D\right)' \cdot p. \tag{1.2}$$

Заметим, что (1.2) вполне согласуется с используемой в математическом анализе формуле для эластичности произвольной дифференцируемой функции $y(x)$

$$E_y = \frac{y'}{y} \cdot x = \left(\ln y\right)' \cdot x$$

**Замечание 1.1.** В силу экономического смысла функция спроса $D\left(p\right)$ и цена $p$ принимают положительные значения. По той же причине $D\left(p\right)$ является невозрастающей функцией $p$. Поэтому производная $D'\left(p\right)$ и, в силу (1.2), эластичность $E_D$ являются неположительными величинами.

**Определение 1.2.** *Спрос называется* ***эластичным****, если* $\left|E_D\right| > 1$, *и* ***неэластичным****, если* $\left|E_D\right| < 1$,

**Замечание 1.2.** Если функция спроса не зависит от цены, т.е. $E_D = 0$, то спрос называют *совершенно неэластичным.* Если же малое изменение цены приводит к значительному изменению спроса, то говорят, что спрос является *совершенно эластичным*, и полагают, что $\left|E_D\right| = \infty$.

**Пример 1.1.** Пусть функция спроса $D\left(p\right) = Cp^{-a}$, $C > 0$, $a > 0$. Найти эластичность спроса и значения параметра $a$, при которых спрос эластичен.

Решение. В силу ограничений на параметры $C$ и $a$ функция $D\left(p\right)$ является положительной и убывающей. При этом $D' = -aCp^{-a-1} = -\dfrac{aC}{p^{a+1}}$ и $E_D = -\dfrac{aCp}{p^{a+1}Cp^{-a}} = -a$. Поэтому $\left|E_D\right| = a$, и спрос эластичен при $a > 1$ и неэластичен при $a < 1$.

Поясним теперь важность разделения эластичного и неэластичного спроса. Так как спрос $D\left(p\right)$ является количеством проданного по цене $p$ товара, то *общая выручка* (total revenue) $TR$ (или просто $R$) равна $R = p \cdot D\left(p\right)$. Поэтому

$$R' = p'D\left(p\right) + pD'\left(p\right) = D + pD',$$

а эластичность выручки

$$E_R = \frac{R'}{R} \cdot p = \frac{D + pD'}{pD} \cdot p = \frac{D + pD'}{D} = 1 + \frac{D'}{D} \cdot p = 1 + E_D.$$

Рассматривая случаи эластичного спроса, т.е. $\left|E_D\right| > 1$ ($E_D < -1$) и неэластичного спроса $\left|E_D\right| < 1$ ($-1 < E_D < 0$), приходим к следующему выводу: в первом случае $E_R < 0$, а во втором – $E_R > 0$. Таким образом,

*При эластичном спросе изменение цены приводит к изменению выручки в противоположном направлении, т.е. увеличение (уменьшение) цены приводит к уменьшению (увеличению) выручки. Если же* *спрос неэластичен, то изменение цены вызывает изменение выручки в том же направлении, т.е. увеличение (уменьшение) цены приводит к увеличению (уменьшению) выручки.*

**Пример 1.2.** Пусть функция спроса $D(p)=12-p$. Исследовать зависимость между эластичностью спроса и доходом от продажи товара.

Решение. Поскольку функция спроса равна количеству реализованного товара, т.е. $q=D(p)=12-p$, то общий доход $R$, получаемый при спросе $D(p)$, равен

$$R(p)=pD(p)=p(12-p)\ =12p-p^2.$$

Так как величины $D(p)$ и $p$ положительны, то будем рассматривать функцию $R(p)$ на промежутке $(0;12)$. При этом, так как $R'(p)\ =12-2p$, то $R(p)$ возрастает при $0<p<6$ и убывает при $6<p<12$.

С другой стороны, $E_D=\dfrac{D'}{D}p=\dfrac{p}{p-12}$. В силу замечания 1.1 условие эластичности спроса $|E_D|>1$ можно переписать в виде $E_D<-1$. Решая неравенство $\dfrac{p}{p-12}<-1$ с учетом $p-12<0$, получаем $p\in(6,12)$, т.е интервал, на котором функция $R(p)$ убывает. Таким образом, при эластичном спросе цену товара повышать не выгодно.

Аналогично, условие неэластичности спроса $|E_D|<1$ можно переписать в виде $E_D>-1$, т.е. $p\in(0,6)$. Последний интервал совпадает с множеством, на котором доход $R$ возрастает с увеличением цены. При неэластичном спросе увеличение цены товара приводит к увеличению выручки.

Наряду с общей выручкой важной для приложений является *функция издержек* фирмы. Компания, как правило, имеет фиксированные издержки $FC$ (fixed cost), которые не зависят от объемов призведенной продукции, и переменные издержки $VC$ (variable cost). *Общие издержки* $TC$ (total cost) являются суммой $TC=FC+VC$, причем $FC=TC(0)$. Множество, на котором общие издержки равны общей выручке, т.е. $TC=TR$, называется *безубыточным множеством*.

**Пример 1.3.** Пусть функция общих издержек $TC=p^2+8p+16$, а функция общей выручки равна $TR=18p$. Найти множество безубыточности.

Р е ш е н и е . Решая уравнение $TC = TR$, т.е. $p^2 + 8p + 16 = 18p$, получим $p = 2$ и $p = 8$. Таким образом, множество безубыточности состоит из двух точек. При этом легко видеть, что производство убыточно ($TR < TC$) при $p \in (2,8)$, и прибыльно при остальных *p*.

При подготовке задач для самостоятельного решения главы 1 использованы материалы пособий [11] и [14].

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Найти эластичность спроса при цене $p = 4$, если $D(p) = 28 - p^2$. Эластичен ли спрос при данной цене?

2. Исследовать зависимость между эластичностью спроса и доходом от продажи товара, если фукнция спроса $D(p) = 16 - p$.

3. Пусть функция общих издержек $TC = p^2 + 10p + 18$, а функция общей выручки равна $TR = 21p$. Найти множество безубыточности. При каких ценах производство убыточно?

## 1.2. Функция предложения и рыночное равновесие

*Функция предложения* (supply) $S(p)$ задает количество товара, которое поставщик может предложить по рыночной цене $p$. В силу своего экономического смысла, функция предложения $S(p)$ является неотрицательной и неубывающей.

**Определение 1.3.** *Говорят, что **рынок находится в равновесии**, если покупатели могут купить столько товара, сколько им необходимо, а продавец может реализовать весь товар, который он намерен продать.*

Равновесная цена $p_0$ товара на рынке находится из условия $S(p_0) = D(p_0)$, а количество $q_0$ проданного товара $q_0 = D(p_0)$.

**Пример 1.4.** Пусть функция спроса задана функцией $D(p) = 204 - p - p^2$, а функция предложения равна $S(p) = 2p^2 + 2p + 114$. Найти равновесную цену и количество проданного товара.

Р е ш е н и е . Решая уравнение $204 - p - p^2 = 2p^2 + 2p + 114$, получим,

$$3p^2 + 3p - 90 = 0, \text{ т.е. } p = 5 \text{ и } p = -6.$$

В силу экономического смысла задачи $\left(p \geq 0\right)$ имеем $p_0 = 5$, $q_0 = D\left(p_0\right) = 170$

**Пример 1.5** (задача *о распределении налогового бремени*). Найти изменение равновесной цены при введении дополнительного налога $t$ на единицу продукции, если $D\left(p\right) = 34 - 3p$, $S(p) = 7p - 4$. Как распределится бремя дополнительного налога между потребителем и производителем?

Решение. Если на производителя вводится дополнительный налог в размере $t$ (tax) на каждую единицу продукции, то при новой равновесной цене товара $p_t$ стоимость единицы продукции для потребителя равна $p_t$, а для производителя выручка с единицы продукции составляет $p_t - t$ ($t$ исключается из выручки как налоговая выплата). Поэтому $p_t$ находится из уравнения

$$S(p_t - t) = D(p_t).$$

Итак, из уравнения $34 - 3p_0 = 7p_0 - 6$ находим исходную равновесную цену $p_0 = 4$. Решая уравнение $7\left(p_t - t\right) - 6 = 34 - 3p_t$ для новой равновесной цены $p_t$, получим, что $p_t = 4 + \frac{7}{10}t = p_0 + \frac{7}{10}t$. Таким образом, равновесная цена выросла по сравнению с $p_0 = 4$, но не на полную величину налога, а на ее часть: бремя налога делится между потребителем и производителем в отношении $7:3$.

Если функции спроса и предложения заданы произвольными линейными функциями

$$D\left(p\right) = d_2 - d_1 p,\ S(p) = s_1 p + s_2,$$

где $d_1, d_2, s_1, s_2 \in R$, $d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$, то легко показать, что бремя дополнительного налога разделится между потребителем и производителем в отношении $s_1 : d_1$.

## Задачи для самостоятельного решения

4. Пусть функция кратковременного спроса имеет вид $D\left(p\right) = 180 - 0{,}4p$ и кратковременного предложения $S\left(p\right) = 100 + 0{,}4p$. Найти эластичность кратковременного спроса в точке рыночного равновесия.

5. Пусть функция спроса задана функцией $D(p) = 215 - 3p - 3p^2$, а функция предложения равна $S(p) = 2p^2 + 2p + 115$. Найти равновесную цену и количество проданного товара.

6. Найти изменение равновесной цены при введении дополнительного налога $t$ на единицу продукции, если $D(p) = 42 - 4p$, $S(p) = 6p - 2$. Как распределится бремя дополнительного налога между потребителем и производителем?

## 1.3. Предельные величины в экономике и оптимизация прибыли

Наряду с функциями издержек, дохода и т.д. в экономике рассматриваются соответсвующие *предельные величины.* К ним относятся *предельные издержки, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность* и т.д. Предельная величина определяется как отношение $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ относительного изменения $\Delta Y$ величины $Y = Y(X)$ (например, дохода фирмы) при изменении $\Delta X$ величины $X$ (например, объема производства):

$$MY = \frac{\Delta Y}{\Delta X}.$$

Если же $Y(X)$ является дифференцируемой функцией, то предельную величину рассматривают при $\Delta X \to 0$:

$$MY = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = Y'(X).$$

Одной из задач оптимизации, естественно возникающих в микроэкономике, является задача об оптимизации прибыли. Необходимое условие максимизации прибыли формулируют как равенство предельного дохода предельным издержкам, т.е.

$$MR = MC. \tag{1.3}$$

Если функции выручки и издержек являются дифференцируемыми, то условие (1.3) можно записать в виде $R'(q) = C'(q)$. При этом, так как функция прибыли $\Pi(q)$ равна разности функций дохода и издержек $\Pi(q) = R(q) - C(q)$, то необходимое условие экстремума $\Pi'(q) = 0$ записывается как $R'(q) - C'(q) = 0$, что эквивлентно (1.3).

**Пример 1.6.** Пусть $C(q) = 2q^3 - 332q^2 + 7000q + 800$ – функция полных затрат на производство $q$ единиц товара, $R(q) = 1000q - 2q^2$ – функция дохода от продажи. Найти максимум прибыли.

Р е ш е н и е. Находим функцию прибыли

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = -2q^3 + 330q^2 - 6000q - 800,$$

ее производную $\Pi'(q) = -6q^2 + 660q - 6000$ и критические точки: $q_1 = 10$ и $q_2 = 100$ (рис. 1.1).

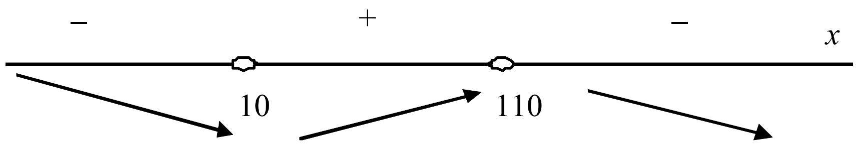



Рис. 1.1

Таким образом, максимум прибыли достигается в точке $q = 100$ и $\Pi_{\max} = \Pi(100) = 699200$. Заметим, что $\Pi_{\min} = \Pi(10) = -29800$. Отрицательная прибыль при низком объеме выпуска товаров объясняется тем, что затраты на их производство больше выручки от продажи.

**Пример 1.7.** Функция спроса $q = D(p) = 2000 - 100p$, фиксированные издержки равны $FC = 25$ и переменные издержки $VC = 10q + 0,03q^2$. Найти максимальную прибыль, множество безубыточности, предельные издержки и доход.

Р е ш е н и е. Общие издержки равны

$$TC = VC + FC = 0,03q^2 + 10q + 25.$$

Далее, из условия $q = 2000 - 100p$ находим, что $p = 20 - 0,01q$, и общая выручка $TR = pq = 20q - 0,01q^2$. Отсюда получаем формулу для прибыли

$$\Pi(q) = TR - TC = -0,04q^2 + 10q - 25$$

Из условия $\Pi'(q) = 0$ получим $10 - 0,08q = 0$, т.е. $q = 125$. Легко проверить, что эта точка является точкой максимума, и $\Pi_{\max} = \Pi(125) = 600$.

Решая уравнение $\Pi(q) = 0$, находим множество безубыточности, состоящее из двух точек $q_{1,2} = 125 \pm 50\sqrt{6}$, а предельные издержки и выручка получаются как производные общих выручки и издержек: $MC = TC' = 0,06q + 10$ и $MR = TR' = 20 - 0,02q$.

Рассмотрим теперь *задачу об оптимизации налогообложения*. Предположим, что на продукцию компании вводится (дополнительный) фиксированный налог $t$ на каждую единицу реализованного товара. Если ставка налога достаточно велика, то производство товара будет невыгодно, и это приведет к его остановке. Естественно, возникает вопрос о такой ставке налога, чтобы итоговый сбор был максимальным.

**Пример 1.8** (*оптимизация налогообложения*). Пусть $R(q)=54q-4q^2$ – доход (выручка) от продажи, а $C(q)=q^2-6q+24$ – затраты на выпуск продукта в зависимости от количества $q$. Найти величину налога $t$ на каждую единицу продукта, чтобы налог $T=tq$ от всей реализуемой продукции был максимальным, и весь налоговый сбор. Как уменьшится количество выпускаемой продукции?

Решение. Найдем сначала объем производства без учета дополнительного налога. Так как $\Pi_0\left(q\right)=-5q^2+60q-24$, то из условия $\Pi_0'\left(q\right)=-10q+60=0$ находим, что максимум прибыли достигается при объеме производства $q_0=6$.

Из-за введения дополнительного налога доход производителя уменьшится на величину $T$ и составит $R^{(T)}(q)=54q-4q^2-tq$, а его прибыль

$$\Pi\left(q\right)=R^{(T)}(q)-C\left(q\right)=-5q^2+60q-tq-24.$$

В результате компания исходит из того, чтобы при реализации товара получить максимальную прибыль. Решая уравнение $\Pi'(q)=0$, находим

$$60-10q-t=0, \text{ т.е. } q=6-t/10.$$

Общая налоговая выплата будет составлять $T=tq=6t-t^2/10$. Вычислим теперь максимум функции $T=T\left(t\right)$. Из условия $T'(t)=0$ следует, что $6-t/5=0$, т.е. $t=30$. Легко видеть, что точка $t=30$ является точкой максимума функции $T(t)$. При этом весь налоговый сбор $T\left(30\right)=6\cdot 30-30^2/10=90$ и объем производства равен $q=6-30/10=3$. Таким образом, введение дополнительного налога уменьшает объем производства в два раза (с 6 до 3 единиц продукции).

## Задачи для самостоятельного решения

7. Пусть $C\left(q\right)=2q^3-376q^2+4100q+2000$ – функция полных затрат на производство $q$ единиц товара, $R\left(q\right)=500q-q^2$ – функция дохода от продажи. Найти максимум прибыли.

8. Функция спроса задана в виде $p = 15 - 0,004q$, фиксированные издержки равны $FC = 50$ и переменные издержки $VC = 6q + 0,02q^2$. Найти максимальную прибыль, точку безубыточности, предельные издержки и доход.

9. Пусть $R(q) = 66q - 3q^2$ – доход (выручка) от продажи, а $C(q) = q^2 - 6q + 14$ – затраты на выпуск продукта в зависимости от количества $q$. Найти величину налога $t$ на каждую единицу продукта, чтобы налог $T = tq$ от всей реализуемой продукции был максимальным, и весь налоговый сбор. Как уменьшится количество выпускаемой продукции?

## 1.4. Основные виды функций нескольких переменных в экономических задачах

Рассмотрим теперь основные виды функций нескольких переменных, которые встречаются в экономических задачах.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – ресурсы, используемые для производства, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – соответствующие количества.

**Определение 1.4.** ***Производственной функцией*** $Q = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется функция, выражающая объем продукции* $Q$*, полученной при использовании ресурсов (факторов)* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *в количествах* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *соответственно.*

Если $n = 1$, то $Q$ называется *однофакторной* функцией, а при $n > 1$ – *многофакторной*. В силу экономического смысла переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и значения $Q$ предполагаются неотрицательными.

Различные виды производственных функций возникают в экономических задачах как функции, описывающие тот или иной производственный процесс и используются для анализа или прогноза деятельности компании, корпорации или отрасли.

Так, двухфакторная *производственная функция Кобба–Дугласа*

$$Q(K, L) = a K^{\beta} L^{1-\beta}, \text{ где } a > 0,\ 0 < \beta < 1, \qquad (1.4)$$

названа в честь американских ученых Чарльза Кобба и Пола Дугласа, которые в 1928 году предприняли попытку эмпирическим путем определить влияние затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США. Они установили, что зависимость объема производства от объема используемого капитала и трудовых ресурсов связаны соотношением (1.4).

Функцией Кобба-Дугласа иногда называют двухфакторную функцию вида более общего вида

$$Q(K,L) = a K^{\alpha} L^{\beta}, \tag{1.5}$$

где $a > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Функции (1.4), (1.5) являются частными случаями *мультипликативных производственных функций* вида

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0\, x_1^{a_1}\, x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}, \tag{1.6}$$

где $a_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Наряду с мультипликативными производственными функциями рассматривают также *линейные производственные функции* вида

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

где $a_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *производственные функции Леонтьева*

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n\}, \tag{1.7}$$

где $\alpha_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n$, и другие.

Каждая этих производственных функций связана с тем или иным технологическим процессом.

**Определение 1.5**. *Геометрическое место точек в пространстве факторов, в которых различные сочетания факторов производства (ресурсов) дают одно и то же количество выпускаемой продукции называют **изоквантой**.*

В связи с понятием изокванты естественно возникает вопрос о возможности замещения одного из ресурсов другими при сохранении объемов производства.

Так, если процесс описывается функцией Кобба-Дугласа (1.4), то из условия $a K^{\beta} L^{1-\beta} = Q_0$ легко выразить как $K$, так и $L$ через остальные параметры производства. Поэтому для любого положительного количества одного ресурса можно подобрать такое количество другого ресурса, что возможно произвести любой требуемый объем продукции.

Наоборот, функция Леонтьева (1.7) характеризует такой производственный процесс, при котором замена одного ресурса другими невозможна при любом объеме производства, и избыток одного ресурса не может компенсировать недостаток другого.

Рассмотрим еще один пример. Двухфакторная линейная производственная функция, функции Леонтьева и Кобба-Дугласа являются частными или предельными случаями производственной функции CES (constant elasticity of substitution)

$$Q(K, L) = F \cdot \left(a K^{-\rho} + (1-a) L^{-\rho}\right)^{1/\rho}, \tag{1.8}$$

где $F$, $a$, $\rho$ – некоторые параметры. Она была введена американским экономистом Нобелевским лауреатом Р.Солоу в 1956 г. Оказывается, для изоквант функции (1.8) для каждого из ресурсов существуют пороговые значения, такие, что если количество ресурсов меньше этих значений, то замещение одного из ресурсов другим невозможно.

Подробнее о структуре изоквант для каждой из производственных функций (1.4), (1.7), (1.8) можно прочитать в пособии [10].

**Определение 1.6.** ***Функцией полезности*** (*utility function*) $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *называется функция, описывающая предпочтения потребителей на множестве товаров* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *и выражающая ценность набора товаров в количествах* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *соответственно. При этом, если* $U(x_1, x_2, \dots, x_n) > U(y_1, y_2, \dots, y_n)$ *для двух различных наборов* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *и* $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$*, то набор x является более полезным для потребителя, чем набор y.*

Ясно, что у каждого потребителя имеются свои предпочтения, поэтому и функция полезности у каждого индивидуальна. При решении практических задач нередко рассматривают (усреднённую) функцию полезности, характерную для некоторой категории потребителей.

**Замечание 1.3.** Из определения 1.6 следует, что значение функции полезности на данном наборе товаров безразлично. Существенным является лишь то, как это значение соотносится со значениями функции полезности на прочих наборах товаров.

**Определение 1.7**. *Геометрическое место точек в пространстве товаров, в которых различные комбинации товаров дают одно и то же значение функции полезности* $U_0 = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$*, называют* ***линией безразличия.***

Среди примеров функций полезности упомянем функцию

$$U(x_1, x_2) = Cx_1^{\alpha} x_2^{\beta},$$

где $C, \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ и ее обощение

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdot (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x_n - a_n)^{\alpha_n}, \quad (1.9)$$

где $x_i > a_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ при $i = 1, 2, \dots, n$. При этом $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ представляет собой минимально допустимый набор товаров. Ввиду замечания 1.3 в приложениях иногда удобнее рассматривать логарифмическую функцию полезности

$$U = \alpha_1 \ln(x_1 - a_1) + \alpha_2 \ln(x_2 - a_2) + \ldots + \alpha_n \ln(x_n - a_n),$$

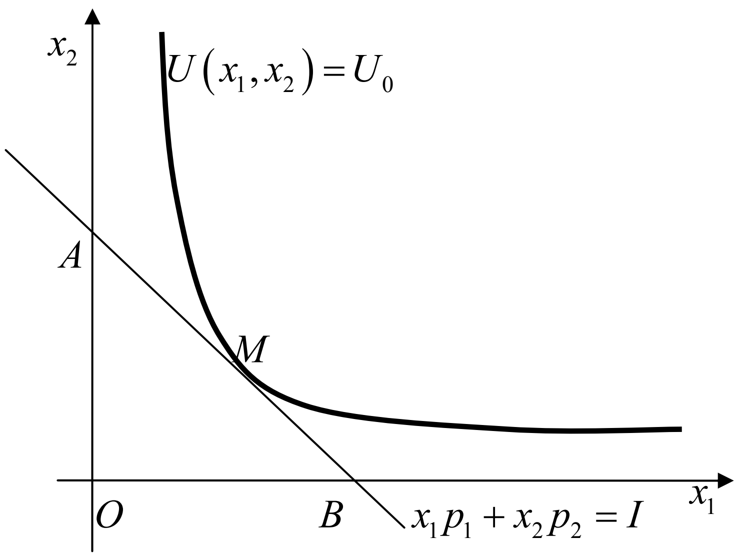



Рис. 1.2

где $\alpha_i > 0$, $x_i > a_i \geq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, которая получается логарифмированием функции (1.9).

Пусть теперь $I$ – денежная сумма, которую потребитель может потратить на приобретение товаров $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а $p_k$ – цена единицы товара $X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда стоимость набора товаров $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$, а *бюджетное ограничение* имеет вид

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n \leq I. \qquad (1.10)$$

**Определение 1.8.** *Множество наборов товаров* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *стоимость которых удовлетворяет бюджетному ограничению* (1.10), *называется* ***бюджетным множеством***.

Если при этом предпочтения потребителей характеризуются функцией полезности $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и потребитель намерен употребить свои средства с наибольшей для себя пользой, то оптимальным набором товаров будет та точка из бюджетного множества, в которой функция полезности принимает наибольшее значение.

**Пример 1.9.** Рассмотрим случай $n = 2$ (см. рис. 1.2). Бюджетное множество (1.10) задает треугольник *OAB*, а оптимальный набор товаров задается точкой касания *M* его границы *AB* и кривой безразличия, наиболее удаленной от начала координат, как имеющей наибольшую полезность среди всех линий безразличия, имеющих общие точки с бюджетным множеством.

**Пример 1.10.** Для товаров $X_1$ и $X_2$ известны функции спроса $q_1 = 54 - p_1$, $q_2 = 35 - \frac{1}{2} p_2$. Фирма-монополист имеет функцию издержек $C = 2q_1^2 + 6q_1 q_2 + 3q_2^2 + 4$. Вычислите максимальную прибыль фирмы в этих условиях и найдите соответствующий производственный план.

Р е ш е н и е. Последовательно находим общую выручку

$$R(q_1,q_2)=p_1q_1+p_2q_2=(54-q_1)q_1+(70-2q_2)q_2=-q_1^2-2q_2^2+54q_1+70q_2$$
и прибыль
$$\Pi(q_1,q_2)=R(q_1,q_2)-C(q_1,q_2)=-3q_1^2-5q_2^2+54q_1+70q_2-6q_1q_2-4.$$
Критические точки функции $\Pi(q_1,q_2)$ находим из системы
$$\begin{cases}\Pi'_{q_1}=-6q_1-6q_2+54=0,\\ \Pi'_{q_2}=-6q_1-10q_2+70=0,\end{cases}$$
решением которой является точка $(5,4)$. Так как матрица вторых производных $G(\Pi)$ функции $\Pi(q_1,q_2)$ не зависит от точки и равна
$$G(\Pi)=\begin{pmatrix}\Pi''_{q_1q_1} & \Pi''_{q_1q_2}\\ \Pi''_{q_2q_1} & \Pi''_{q_2q_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -6\\ -6 & -10\end{pmatrix},$$
то по критерию Сильвестра убеждаемся, что точка $(5,4)$ является точкой максимума функции $\Pi(q_1,q_2)$ и $\Pi_{\max}(5,4)=271$.

## Задачи для самостоятельного решения

10. Фирма-монополист продает товар на трех независимых рынках. Функции спроса на этих рынках линейны и имеют вид $q_1(p_1)=14{,}35-0{,}36p_1$, $q_2(p_2)=21{,}65-0{,}48p_2$, $q_3(p_3)=10{,}5-0{,}25p_3$. Издержки на производство $q$ единиц товара равны $C(q)=55+19q$. Определите цену на каждом из рынков, при которых фирма получит максимальную прибыль.

11. Фирма-монополист продает товар на двух независимых рынках. Функции спроса на этих рынках имеют вид $q_1=\left(\frac{120}{p_1}\right)^2$, $q_2=\left(\frac{40}{p_2}\right)^2$. Издержки на производство $q$ единиц товара равны $C(q)=q^2$. Определите объемы продаж на каждом из рынков, при которых фирма получит максимальную прибыль.

12. Для товаров $X_1$ и $X_2$ известны функции спроса: $q_1=50-p_1$, $q_2=75-\frac{1}{2}p_2$. Фирма-монополист имеет функцию издержек $C=4q_1^2+5q_1q_2+6q_2^2+7$. При каком производственном плане прибыль максимальна?

## 1.5. Предельная полезность товара и предельная норма замещения

Пусть $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функция полезности, описывающая предпочтения потребителя (или некоторой категории потребителей) на множестве товаров $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Аналогично п. 1.3 введем следующее определение.

**Определение 1.9**. ***Предельной полезностью*** *товара $X_k$ называется частная производная функции $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменной $x_k$*

$$U'_{x_k} = \lim_{\Delta x_k \to \infty} \frac{\Delta U}{\Delta x_k}.$$

Таким образом, предельная полезность товара равна $X_k$ скорости изменения полезности набора товаров $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при незначительном изменении его количества $x_k$. Ясно, что она приблизительно равна изменению полезности набора товаров $M$ при изменении количества товара $X_k$ на одну единицу: $U'_{x_k} \approx \frac{\Delta U}{\Delta x_k}$. При этом, так как увеличение количества одного товара, как правило, приводит к повышению полезности набора, то, очевидно, что предельная полезность – величина неотрицательная.

Чтобы сохранить неизменной полезность набора, следует, увеличивая количество одного товара, одновременно уменьшать количество другого товара.

**Определение 1.10**. ***Предельной нормой замещения*** $\mathrm{MRS}_{X_k, X_l}(M)$ *(maginal rate of substitution) товара $X_k$ товаром $X_l$ для набора $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется отношение предельных полезностей товаров $X_k$ и $X_l$:*

$$\mathrm{MRS}_{X_k, X_l}(M) = \frac{U'_{x_k}(M)}{U'_{x_l}(M)}.$$

Предельная норма замещения приблизительно равна количеству товара $X_l$, которое может заменить единицу товара $X_k$ в исходном наборе $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ так, чтобы полезность набора товаров не изменилась.

Из определения естественно получаем, что

$$\mathrm{MRS}_{X_k,X_l}\left(M\right)=\frac{1}{\mathrm{MRS}_{X_l,X_k}\left(M\right)}.$$

**Определение 1.11**. ***Изоклиной*** *для пары товаров* $X_k$ *и* $X_l$ *называется множество наборов товаров* $M=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, *для которых предельная норма замещения товара* $X_k$ *товаром* $X_l$ *постоянна* $\mathrm{MRS}_{X_k,X_l}\left(M\right)=\mathrm{const}$.

**Пример 1.11.** Вычислите предельную норму замещения ресурса $X_1$ ресурсом $X_2$ в точке (4,18), если функции полезности Кобба–Дугласа $U\left(x_1,x_2\right)=C\,x_1^{1/4}x_2^{3/4}$, а также найдите уравнение изоклины, проходящей через эту точку.

Решение. Найдем сначала предельные полезности ресурсов $X_1$ и $X_2$:

$$U'_{x_1}=\frac{C}{4}x_1^{-3/4}x_2^{3/4},\; U'_{x_2}=\frac{3C}{4}x_1^{1/4}\,x_2^{-1/4},$$

Тогда предельная норма замещения имеет вид

$$\mathrm{MRS}_{X_1,X_2}=\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}}=\frac{\frac{C}{4}x_1^{-3/4}x_2^{3/4}}{\frac{3C}{4}x_1^{1/4}\,x_2^{-1/4}}=\frac{x_2}{3x_1},\; \mathrm{MRS}_{X_1,X_2}\left(4,18\right)=\frac{18}{3\cdot 4}=3/2.$$

Таким образом, искомое уравнение изоклины имеет вид $\mathrm{MRS}_{X_1,X_2}=3/2$, т.е. $\dfrac{x_2}{3x_1}=3/2$, или, окончательно, $2x_2-9x_1=0$.

### Задачи для самостоятельного решения

13. Вычислите предельную норму замещения ресурса $X_1$ ресурсом $X_2$ в точке $\left(1,8\right)$, если функции полезности Кобба–Дугласа $U\left(x_1,x_2\right)=C\,x_1^{1/3}x_2^{2/3}$, а также найдите уравнение изоклины, проходящей через эту точку.

14. Для функции полезности $U\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1-2\right)^3\left(x_2-1\right)^2$ и набора товаров $y=f\left(x\right)$ вычислите предельные полезности первого и второго товаров, а также предельную норму замещения $\mathrm{MRS}_{X_1,X_2}$ первого товара вторым.

## 1.6. Критерий оптимального набора товаров и оптимального производственного плана.

Рассмотрим теперь несколько задач, непосредсвенно связанных с понятием предельной нормы замещения. Если известна функция полезности $U = U(x_1, x_2)$ потребителя (мы ограничимся случаем $n = 2$), то вполне естетсвенно поставить вопрос о выборе оптимального набора товаров, а именно: о нахождении самого дешевого набора товаров с данным уровнем полезности и о нахождении самого полезного набора товаров с данной стоимостью, если известны цены $p_1, p_2$ реализации товара.

Как легко можно заключить из рис. 1.2, для обеих рассматриваемых задач оптимальным является набор товаров, отвечающий точке касания $M$ линии безразличия и прямой $x_1 p_1 + x_2 p_2 = I$, т.е. набор из двух товаров $M = (x_1, x_2)$ оптимален тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{MRS}_{X_1, X_2}(M) = \frac{p_1}{p_2}. \tag{1.11}$$

Аналогично, если рассматривается задача об оптимальном производственном плане, т.е. задача о достижении максимально возможного объема производства при данном уровне издержек и о минимизации уровня издержек при данном объеме производства в предположении, что функция издержек линейна

$$C(q_1, q_2) = q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2,$$

где $q_1, q_2$ – объемы используемых ресурсов $X_1, X_2$, а $p_1, p_2$ – стоимости единиц этих ресурсов, то производственный план $M = (q_1, q_2)$ является оптимальным тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (1.11). При этом $\mathrm{MRS}_{X_1, X_2}(M) = \frac{Q'_{q_1}}{Q'_{q_2}}(M)$ – предельная норма замещения первого ресурса вторым, а $Q(q_1, q_2)$ – соответствующая производственная функция.

**Пример 1.12.** Для функции полезности Кобба–Дугласа $U(x_1, x_2) = C\, x_1^{1/4} x_2^{3/4}$ проверьте, будут ли наборы товаров: а) $(2, 5)$, б) $(5, 7)$ самыми дешевыми среди всех наборов, имеющих равные с ними уровни полезности, если стоимости этих товаров составляют $p_1 = 20, p_2 = 24$.

Р е ш е н и е. Согласно вычислениям примера 1.11, предельная норма замещения товара $X_1$ товаром $X_2$ имеет вид $\mathrm{MRS}_{X_1,X_2} = \dfrac{x_2}{3x_1}$. Тогда

$$\mathrm{MRS}_{X_1,X_2}\left(2,5\right) = \frac{5}{6} = \frac{20}{24} = \frac{p_1}{p_2}\ ,\ \mathrm{MRS}_{X_1,X_2}\left(5,7\right) = \frac{7}{3\cdot 5} \neq \frac{p_1}{p_2} = \frac{20}{24}.$$

Таким образом, набор $\left(2,5\right)$ является самым дешевым из всех наборов, имеющих с ним равные уровни полезности, а набор $\left(5,7\right)$ – является.

**Задачи для самостоятельного решения**

15. Для функции полезности Кобба–Дугласа $U\left(x_1, x_2\right) = C x_1^{1/3} x_2^{3/4}$ проверьте, будут ли наборы товаров а) $\left(1,8\right)$, б) $\left(3,5\right)$ самыми дешевыми среди всех наборов, имеющих равные с ними уровни полезности, если стоимости этих товаров составляют $p_1 = 25$, $p_2 = 30$.

16. Для функции полезности $U\left(x_1,x_2\right) = \left(x_1 - 2\right)^3 \cdot \left(x_2 - 1\right)^2$ выяснить, является ли набор товаров $(x_1, x_2) = (3, 5)$ самым полезным из всех наборов, имеющих равную с ним стоимость, если $p_1 = 36$, $p_2 = 6$.

17. Для производственной функции CES $Q\left(K,L\right) = \left(4K^{-1} + 3L^{-1}\right)^{-1}$ и цен на используемые ресурсы $p_K = 2$ и $p_L = 6$ выяснить: а) обеспечит ли производственный план $\left(K,L\right) = \left(6,3\right)$ наибольший выпуск продукции при данном уровне издержек; б) будет ли при использовании производственного плана $\left(K,L\right) = \left(3,6\right)$ минимальным уровень издержек для данного объема выпускаемой продукции?

# Глава 2
# ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Под *транспортной задачей* в дальнейшем понимается задача линейного программирования, в которой требуется найти оптимальный (по стоимости) план перевозок некоторого однородного груза от конечного числа поставщиков $A_1, A_2, \dots, A_m$ с заданными запасами $a_1, \dots, a_m$ к конечному числу потребителей $B_1, B_2, \dots, B_n$ с потребностями $b_1, \dots, b_n$. Стоимость $c_{ij}$ перевозки единицы груза от поставщика $A_i$ к потребителю $B_j$ предполагается известной.

Отметим, что данная постановка задачи может быть значительно расширена или изменена. Например, в приложениях часто рассматриваются задачи перевозки *неоднородного* груза. Также в качестве критерия оптимальности можно рассматривать *время перевозок* (транспортная задача по критерию времени). Подобного рода задачи решаются сведением к однородной транспортной задаче, или для них разработаны другие методы, изложение которых остается за рамками данной книги.

## § 2.1. Постановка задачи

Итак, пусть $X = \left(x_{ij}\right)$ – $m \times n$ матрица, где $x_{ij}$ – объем перевозок от $i$-го поставщика к $j$-му потребителю. Тогда общие затраты на перевозку груза определяются функцией $z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$. Математическая постановка транспортной задачи определяется следующей задачей линейного программирования

$$z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\ldots,n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\ldots,m, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Первая часть нетривиальных ограничений означает, что все потребности удовлетворены, вторая часть – то, что весь груз вывезен от поставщиков.

**Замечание 2.1.** Если запасы и потребности задаются целыми числами, то транспортная задача имеет целочисленное оптимальное решение, поэтому транспортную задачу относят формально к задачам целочисленного линейного программирования.

Можно показать, что число базисных переменных в системе ограничений (2.1) равно $m+n-1$.

| Поставщики | Потребители | | | | | | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $\cdots$ | $B_j$ | $\cdots$ | $B_n$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$<br>$x_{11}$ | $c_{12}$<br>$x_{12}$ | $\cdots$ | $c_{1j}$<br>$x_{1j}$ | $\cdots$ | $c_{1n}$<br>$x_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$<br>$x_{21}$ | $c_{22}$<br>$x_{22}$ | $\cdots$ | $c_{2j}$<br>$x_{2j}$ | $\cdots$ | $c_{2n}$<br>$x_{2n}$ | $a_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $A_i$ | $c_{i1}$<br>$x_{i1}$ | $c_{i2}$<br>$x_{i2}$ | $\cdots$ | $c_{ij}$<br>$x_{ij}$ | $\cdots$ | $c_{in}$<br>$x_{in}$ | $a_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $c_{m1}$<br>$x_{m1}$ | $c_{m2}$<br>$x_{m2}$ | $\cdots$ | $c_{mj}$<br>$x_{mj}$ | $\cdots$ | $c_{mn}$<br>$x_{mn}$ | $a_m$ |
| Потребности | $b_1$ | $b_2$ | $\cdots$ | $b_j$ | $\cdots$ | $b_n$ | |

Таблица 2.1

**Определение 2.1.** Решение $X = \left(x_{ij}\right)$ (оптимальное решение $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$) транспортной задачи, удовлетворяющее условиям (2.1) и имеющее не более $m+n-1$ занятой клетки (ненулевой перевозки), будем называть *опорным планом (оптимальным опорным планом)* транспортной задачи.

Исходные данные задачи представляют в виде таблицы 2.1. Общие запасы определяются суммой $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность –

$\sum_{j=1}^{n} b_j$. Транспортная задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель *закрытой*, если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то есть суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то такая задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*.

## § 2.2. Построение начального опорного плана транспортной задачи

Алгоритм решения транспортной задачи с правильным балансом излагается в курсе «Линейная алгебра». В этом параграфе мы напомним основные методы построения начального опорного плана и метод потенциалов решения транспортной задачи.

Первым этапом решения является построение начального опорного плана, т.е. плана перевозок, удовлетворяющего всем ограничениям конкретной транспортной задачи. Сущность методов состоит в том, что начальный опорный план находят за не более чем $m+n-1$ шагов (по числу базисных переменных), на каждом из которых в транспортной таблице заполняют одну клетку, которую называют занятой. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетка). Различаются эти планы по принципам выбора заполняемых клеток и, в зависимости от этого, могут давать планы, более или менее отличные от оптимального.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 11 | 3 | 13 | 140 |
| $A_2$ | 12 | 4 | 8 | 2 | 160 |
| $A_3$ | 3 | 5 | 14 | 6 | 100 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.2

**Пример 2.1.** Рассмотрим транспортную задачу, заданную таблицей 2.2. В правом нижнем углу стоит сумма запасов (и, одновременно, сумма потребностей, так как модель закрытая) 140+160+100=80+40+ +150+ 130=400.

Напомним сначала метод *северо-западного угла.* Заполнение таблицы начинаем с левого верхнего (северо-западного) угла таблицы. Так как потребности первого потребителя $B_1$ равны 80, а запасы первого поставщика $A_1$ равны 140, то в клетку $A_1B_1$ вписываем максимально возможную перевозку 80.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 **80** | 11 **40** | 3 **20** | 13 | 140 |
| $A_2$ | 12 | 4 | 8 **130** | 2 **30** | 160 |
| $A_3$ | 3 | 5 | 14 | 6 **100** | 100 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.3

Потребности $B_1$ полностью удовлетворены, поэтому первый столбец исключаем из рассмотрения, а оставшиеся запасы первого поставщика, т.е. 60, переносим следующим потребителям. Мы можем 40 записать потребителю $B_2$ (столбец $B_2$ исключается), а оставшиеся 20 – $B_3$ и исключить первую строку из дальнейшего рассмотрения.

Далее, так как потребности $B_3$ равны 150, а 20 единиц груза ему уже доставлены, то оставшиеся 130 единиц доставляются от второго поставщика $A_2$ (заполняем клетку $A_2B_3$). Столбец $B_3$ исключаем из рассмотрения, а оставшиеся запасы второго поставщика (30 единиц) записываем потребителю $B_4$. Окончательно потребности последнего удовлетворяются за счет поставщика $A_3$: вписываем в клетку $A_3B_4$ перевозку 100. Заметим, что, так как исходная задача - с правильным балансом, то потребности последнего потребителя $B_4$ равны запасам поставщика $A_3$, т.е. 100. Получаем таблицу 2.3 с начальным опорным планом

$$X = \begin{pmatrix} 80 & 40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 130 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Суммарная стоимость перевозок равна

$$z(X) = 1\cdot 80 + 11\cdot 40 + 3\cdot 20 + 8\cdot 130 + 2\cdot 30 + 6\cdot 100 = 2280.$$

Из решения видно, что метод северо-западного угла, с одной стороны, достаточно прост с точки зрения построения, а с другой стороны, не учитывает стоимость перевозок. Поэтому опорный план, построенный методом северо-западного угла, как правило, далек от оптимального.

Построим теперь для этой же задачи начальный опорный план *методом минимального тарифа.* Суть этого метода состоит в том, что в клетки с наименьшими тарифами помещают максимально возможные перевозки. Итак, в таблице исходной задачи выбираем клетку с минимальным тарифом, т.е. клетку $A_1B_1$ с тарифом 1. Запасы поставщика $A_1$ равны 140, а потребности $B_1$ – 80, поэтому в клетку $A_1B_1$ вписываем максимально возможную перевозку 80, и потребителя $B_1$ исключаем из рассмотрения. В оставшейся части таблицы выбираем минимальный тариф, т.е. клетку $A_2B_4$ с тарифом 2. Запасы поставщика $A_2$ равны 140, а потребности $B_4$ - 130, поэтому в клетку $A_2B_4$ записываем перевозку 130 и потребителя $B_4$ исключаем из рассмотрения. У оставшихся потребителей $B_2$, $B_3$ выбираем клетку с минимальным тарифом. Это $A_1B_3$ с тарифом 3. Запасы (оставшиеся) поставщика $A_1$ равны 60, а потребности $B_3$ – 150, поэтому в клетку $A_1B_3$ записываем максимально возможную перевозку 60 и исключаем поставщика $A_1$ из дальнейшего рассмотрения. Далее, аналогично в клетку $A_2B_2$ записываем 30 и исключаем второго поставщика.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 **80** | 11 | 3 **60** | 13 | 140 |
| $A_2$ | 12 | 4 **30** | 8 | 2 **130** | 160 |
| $A_3$ | 3 | 5 **10** | 14 **90** | 6 | 100 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.4

В оставшиеся две клетки $A_3B_2$ и $A_3B_3$ последовательно вписываем перевозку 10 в $A_3B_2$ и 90 в $A_3B_3$. Получаем таблицу 2.4 с начальным опорным планом $X = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 130 \\ 0 & 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}$. Суммарная стоимость перевозок равна

$$z(X) = 1\cdot 80 + 3\cdot 60 + 4\cdot 30 + 2\cdot 130 + 5\cdot 10 + 14\cdot 90 = 1950 < 2280.$$

Таким образом, опорный план, построенный методом минимального тарифа, лучше, чем план, полученный методом северо-западного угла.

Применим, наконец, к исходной задаче метод аппроксимации Фогеля. Для этого найдем разность между двумя минимальными тарифами для каждой строки и столбца таблицы и запишем их в дополнительно образованные строки и столбцы (см. таблицу 2.5). В строке $A_1$ минимальный тариф равен 1, а следующий за ним 3, поэтому разность между ними 4-2=2; в строке $A_2$ минимальный тариф равен 2, а следующий за ним 4, поэтому разность между равна 2; аналогично, для строки $A_3$ разность между минимальным тарифом 3 и следующим за ним 5 равна 2. Итак, три двойки записываем в первый дополнительный столбец.

Аналогично для столбцов разности 3-1=2, 5-4=1, 8-3=5 и 6-2=4 записываем в первую дополнительную строку. Теперь из всех разностей выбираем *максимальную*, т.е. 5 в столбце $B_3$, и в клетку $A_1B_3$ с минимальным тарифом в этом столбце записываем максимально возможную перевозку 140. При этом поставщика $A_1$ исключаем из рассмотрения. Теперь аналогично вычисляем разности между оставшимися минимальными тарифами и заполняем вторые дополнительные столбец и строку, не учитывая тарифы в строке $A_1$. Видим, что теперь максимальная разность получается в столбце $B_1$ и перевозку 80 записываем в клетку $A_3B_1$ с минимальным тарифом 3 в этом столбце (первую строку мы исключили из рассмотрения). Столбец $B_1$ аналогично исключаем из рассмотрения. Как видно из таблицы, на следующем

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ | Разности по строкам | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 11 | 3 **140** | 13 | 140 | 2 | – | – | – | – | – |
| $A_2$ | 12 | 4 **20** | 8 **10** | 2 **130** | 160 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | – |
| $A_3$ | 3 **80** | 5 **20** | 14 | 6 | 100 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | 400 | | | | | | |
| Разности по столбцам | 2 | 1 | 5 | 4 | | | | | | | |
| | 9 | 1 | 6 | 4 | | | | | | | |
| | – | 1 | 6 | 4 | | | | | | | |
| | – | 1 | – | 4 | | | | | | | |
| | – | 1 | – | – | | | | | | | |
| | – | 0 | – | – | | | | | | | |

Таблица 2.5

шаге вписываем перевозку 10 в клетку $A_2B_3$ и исключаем столбец $B_3$, затем – максимально возможную перевозку 40 в клетку $A_2B_4$ и исключаем из рассмотрения столбец $B_4$. Теперь для вычисления дальнейших разностей остается единственный столбец $B_2$, поэтому в качестве разностей по строкам записываем нули. Далее, в клетку $A_2B_2$ записываем 20, а на последнем шаге записываем перевозку 20 в клетку $A_3B_2$. Получаем таблицу с начальным опорным планом $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 140 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 130 \\ 80 & 20 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, а общая стоимость перевозок

$$z(X)=3\cdot140+4\cdot20+8\cdot10+2\cdot130+3\cdot80+5\cdot20=1180<1950.$$

Отметим, что методом Фогеля обычно получается план, близкий к оптимальному, или сам оптимальный план.

**Замечание 2.2.** *В общем случае опорный план транспортной задачи состоит из* $m+n-1$ *занятой клетки (по числу базисных переменных). Такой план называется* ***невырожденным****. Нередко при решении транспортной задачи возникает* ***вырожденный*** *план с меньшим числом занятых клеток* (*когда какие-то из базисных переменных равны* $0$). *В этом случае выбирается свободная клетка (или несколько свободных клеток – в зависимости от вырожденности плана) с* ***наименьшим*** *тарифом, которая в дальнейшем формально считается занятой с* ***нулевой*** *перевозкой.*

## § 2.3. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Вторым этапом решения транспортной задачи является проверка построенного плана на оптимальность и его улучшение (если он не оптимален) с помощью метода потенциалов. Применение метода потенциалов основано на следующей теореме

**Теорема 2.1.** *Если опорный план* $X=\left(x_{ij}\right)$ *транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы поставщиков* $u_i, i=1,\ldots,m$ *и потребителей* $v_j$, $j=1,\ldots,n$, *удовлетворяющие условиям:*

$$u_i+v_j=c_{ij} \text{ при } x_{ij}>0 \text{ (для занятых клеток),} \quad (2.2)$$

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\le 0 \text{ при } x_{ij}=0 \text{ (для свободных клеток).} \quad (2.3)$$

Условия (2.2) образуют систему с $m+n$ неизвестными $u_i$, $v_j$ и, в общем случае, $m+n-1$ уравнений. Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одну из неизвестных можно задать произвольно, а остальные найти из системы.

Числа $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ называют *оценками свободных клеток*. Таким образом, согласно теореме, *опорный план будет оптимален, если для всех свободных клеток таблицы оценки неположительные.*

| $u_i \backslash v_j$ | 2 | 4 | 8 | 2 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -5 | 1 $\boxed{-4}$ | 11 $\boxed{-12}$ | 3 **140** | 13 $\boxed{-16}$ | 140 |
| 0 | 12 $\boxed{-10}$ | 4 **20** | 8 **10** | 2 **130** | 160 |
| 1 | 3 **80** | 5 **20** | 14 $\boxed{-5}$ | 6 $\boxed{-3}$ | 100 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.6

Проверим теперь оптимальность планов, построенных выше.

**Пример 2.2.** Сначала рассмотрим начальный опорный план, построенный методом минимального тарифа и методом Фогеля. Потенциалы будем записывать в первые строку и столбец вместо обозначений поставщиков и потребителей.

Так как одну из неизвестных можно задать произвольно, то удобнее всего выбирать в качестве исходной переменной тот потенциал, в строке которого больше всего занятых клеток. Здесь, таким образом, полагаем $u_2 = 0$. Из условий (2.2) $u_2 + v_2 = 4$, $u_2 + v_3 = 8$, $u_2 + v_4 = 2$ сразу находим, что $v_2 = 4$, $v_3 = 8$, $v_4 = 2$. Далее, из $u_3 + v_2 = 5$ получаем, что $u_3 = 1$, из $u_1 + v_3 = 3$ следует $u_1 = -5$, а из $u_3 + v_1 = 3$ заключаем, что $v_1 = 2$. Все потенциалы найдены (см. таблицу 2.6).

| $u_i \backslash v_j$ | 1 | -6 | 3 | -8 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 **80** | 11 $\boxed{-17}$ | 3 **60** | 13 $\boxed{-21}$ | 140 |
| 10 | 12 $\boxed{-1}$ | 4 **30** | 8 $\boxed{5}$ | 2 **130** | 160 |
| 11 | 3 $\boxed{9}$ | 5 **10** | 14 **90** | 6 $\boxed{-3}$ | 100 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.7

Теперь находим оценки для свободных клеток

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -4 < 0,\ \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -12 < 0,$$
$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = -16 < 0,\ \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -10 < 0,$$
$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -5 < 0,\ \Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -3 < 0.$$

Результат записываем в таблицу 2.6 (где в свободных клетках в квадратике записаны оценки). Все оценки отрицательны, поэтому план $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 140 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 130 \\ 80 & 20 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ оптимален и $z_{\min} = z(X^*) = 1180$.

**Пример 2.3.** Теперь проверим на оптимальность план перевозок, полученный методом минимального тарифа. Ясно, что в силу большей суммарной стоимости перевозок план не оптимален, но вычисление потенциалов и оценок необходимо для того, чтобы этот начальный опорный план улучшить. Проделав вычисления, аналогичные примеру 2.2, для опорного плана примера 2.1, построенного методом минимального тарифа, получаем таблицу 2.7. Как видим, среди оценок есть положительные, поэтому, как и ожидалось, опорный план $X = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 130 \\ 0 & 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}$ не оптимален.

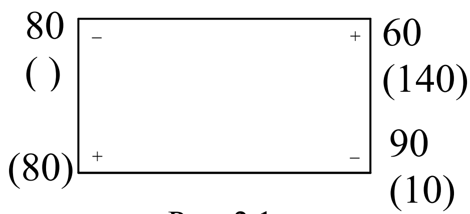


Рис. 2.1

Чтобы улучшить опорное решение $X$ транспортной задачи, введем понятие цикла. Напомним, что *циклом* называется последовательность клеток таблицы транспортной задачи, в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце. Цикл обычно изображают в виде замкнутой ломаной линии, соединяющей вершины цикла, расположенные в клетках таблицы.

| $u_i$ \ $v_j$ | 3 | 5 | 14 | 1 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -11 | 1 $\boxed{-9}$ | 11 $\boxed{-17}$ | 3 **140** | 13 $\boxed{-25}$ | 140 |
| 1 | 12 $\boxed{-8}$ | 4 **30** | 8 $\boxed{7}$ | 2 **130** | 160 |
| 0 | 3 **80** | 5 **10** | 14 **10** | 6 $\boxed{-5}$ | 100 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.8

Для построения нового опорного плана в таблице выбираем свободную клетку с *максимальной положительной оценкой* (клетка $A_3B_1$) и формируем цикл, одной из вершин которого является выбранная клетка, а остальные клетки *занятые*. Легко видеть, что это цикл, соединяющий клетки $A_3B_1$, $A_1B_1$, $A_1B_3$, и $A_3B_3$. Кроме этого, сопоставим каждой вершине цикла знак и перевозку, при этом свободной клетке сопоставляем знак «+», а для остальных клеток знаки чередуются. Получим следующий цикл, изображенный на рисунке 2.1. Теперь сделаем перестановку по циклу, а именно: из всех вершин, отмеченных минусом, вычтем минимум из всех перевозок, означенных этим знаком, т.е. в читаем $\Delta = \min(80,90) = 80$, а ко всем вершинам с «+» прибавим $\Delta$. Получим новые значения перевозок, обозначенные на рис. 2.1 в скобках.

При этом клетка $A_1B_1$ (обозначена знаком «()») становится свободной, и мы получаем новый опорный план (таблица 2.8). Общая стоимость перевозок равна

$$z(X) = 3\cdot140 + 4\cdot30 + 2\cdot130 + 3\cdot80 + 5\cdot10 + 14\cdot10 = 1230 < 1950.$$

Полученный план лучше начального, и, оценивая его оптимальность с помощью метода потенциалов, видим, что есть положительные оценки, и план не оптимален (см. таблицу 2.8). Снова выбираем свободную клетку с положительной оценкой (здесь такая клетка единственная – клетка $A_2B_3$) и формируем цикл с вершиной в этой клетке.

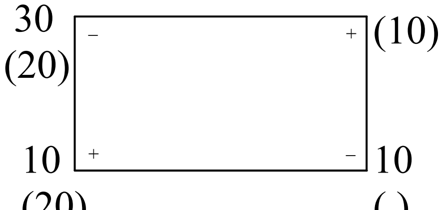


Рис. 2.2

Таковым является цикл, соединяющий клетки $A_2B_3$, $A_3B_3$, $A_3B_2$ и $A_2B_2$ (рис. 2.2). Так как $\Delta = \min(30,10) = 10$, то после перестановки по циклу получаем новый план $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 140 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 130 \\ 80 & 20 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, фактически уже возникавший в таблице 2.6. Его оптимальность уже была проверена.

## Задачи для самостоятельного решения

Решить методом потенциалов транспортные задачи

18.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 8 | 6 | 9 | 2 | 160 |
| $A_2$ | 7 | 16 | 12 | 12 | 60 |
| $A_3$ | 6 | 15 | 8 | 3 | 180 |
| $b_j$ | 80 | 60 | 60 | 200 | |

19.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 4 | 8 | 6 | 80 |
| $A_2$ | 11 | 15 | 24 | 18 | 50 |
| $A_3$ | 11 | 22 | 15 | 14 | 180 |
| $b_j$ | 100 | 10 | 40 | 160 | |

20.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 10 | 10 | 4 | 8 | 90 |
| $A_2$ | 14 | 25 | 13 | 23 | 60 |
| $A_3$ | 12 | 13 | 6 | 12 | 140 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 90 | 80 | |

21.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 10 | 8 | 8 | 160 |
| $A_2$ | 11 | 29 | 14 | 18 | 80 |
| $A_3$ | 11 | 26 | 16 | 25 | 70 |
| $b_j$ | 100 | 70 | 30 | 110 | |

22.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 12 | 5 | 8 | 6 | 70 |
| $A_2$ | 12 | 17 | 13 | 17 | 60 |
| $A_3$ | 10 | 18 | 10 | 14 | 140 |
| $b_j$ | 90 | 50 | 100 | 30 | |

23.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 14 | 11 | 18 | 30 |
| $A_2$ | 3 | 17 | 1 | 10 | 130 |
| $A_3$ | 9 | 16 | 11 | 18 | 120 |
| $b_j$ | 50 | 70 | 30 | 130 | |

24.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 9 | 14 | 10 | 120 |
| $A_2$ | 20 | 15 | 20 | 20 | 140 |
| $A_3$ | 12 | 8 | 14 | 17 | 70 |
| $b_j$ | 80 | 90 | 70 | 90 | |

25.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 14 | 9 | 12 | 4 | 150 |
| $A_2$ | 12 | 15 | 19 | 16 | 70 |
| $A_3$ | 15 | 19 | 15 | 12 | 210 |
| $b_j$ | 140 | 50 | 100 | 140 | |

## § 2.4. Открытая модель транспортной задачи

Напомним, что транспортная задача $m \times n$ называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*, если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарные запасы не равны суммарным потребностям.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 11 | 3 | 13 | 150 |
| $A_2$ | 12 | 4 | 8 | 2 | 160 |
| $A_3$ | 3 | 5 | 14 | 6 | 120 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | |

Таблица 2.9

Открытую задачу можно свести к замкнутой:

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного потребителя $B_{n+1}$ с по-

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $a_i$ | Разности по строкам | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_j$ \ $v_j$ | 0 | 3 | 4 | 2 | –3 | | | | | | | | |
| 0 | 11 $\boxed{-11}$ | 5 $\boxed{-2}$ | 4 **10** | 2 **90** | 0 $\boxed{-3}$ | 100 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | – | – |
| 1 | 1 **70** | 4 **60** | 5 **70** | 9 $\boxed{-6}$ | 0 $\boxed{-2}$ | 200 | 1 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | – |
| 3 | 9 $\boxed{-6}$ | 8 $\boxed{-2}$ | 7 **100** | 10 $\boxed{-5}$ | 0 **30** | 130 | 7 | 7 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $b_j$ | 70 | 60 | 180 | 90 | 30 | 400 | | | | | | | |
| Разности по столбцам | 8 | 1 | 1 | 7 | 0 | | | | | | | | |
| | – | 1 | 1 | 7 | 0 | | | | | | | | |
| | – | 1 | 1 | 7 | – | | | | | | | | |
| | – | 1 | 1 | – | – | | | | | | | | |
| | – | – | 1 | – | – | | | | | | | | |
| | – | – | 2 | – | – | | | | | | | | |
| | – | – | 0 | – | – | | | | | | | | |

Таблица 2.10

требностью $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$ и нулевыми тарифами перевозок в столбце.

2. Если $\sum_{i=1}^{m}a_i<\sum_{j=1}^{n}b_j$, то вводят фиктивного поставщика $A_{m+1}$ с запасом $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$ и нулевыми тарифами перевозок в строке.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 14 | 11 | 18 | 60 |
| $A_2$ | 3 | 17 | 1 | 10 | 130 |
| $A_3$ | 9 | 16 | 11 | 18 | 120 |
| $b_j$ | 60 | 100 | 30 | 160 | |

Таблица 2.11

**Пример 2.4.** Рассмотрим задачу примера 2.1, но с измененным запасами, заданную таблицей 2.9. Так как сумма запасов $150+160+120=430$ больше суммы потребностей $70+60+180+90=400$, то вводим фиктивного потребителя $B_5$ с нулевыми тарифами перевозок и потребностями 30 (таблица 2.10).

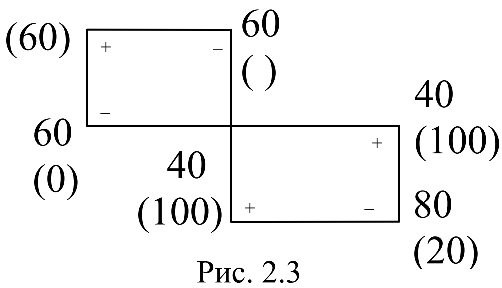



Рис. 2.3

Методом аппроксимации Фогеля построим начальный план и методом потенциалов проверим полученный план на оптимальность.

| $u_i \backslash v_j$ | 3 | 8 | 1 | 10 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 $\boxed{5}$ | 14 **60** | 11 $\boxed{-4}$ | 18 $\boxed{-2}$ | 60 |
| 0 | 3 **60** | 17 $\boxed{-9}$ | 1 **30** | 10 **40** | 130 |
| 8 | 9 $\boxed{2}$ | 16 **40** | 11 $\boxed{-1}$ | 18 **80** | 120 |
| -10 | 0 $\boxed{-7}$ | 0 $\boxed{-2}$ | 0 $\boxed{-9}$ | 0 **40** | 40 |
| $b_j$ | 60 | 100 | 30 | 160 | |

Таблица 2.12

Получаем, что все оценки отрицательны, поэтому полученный план

$$X^*=\begin{pmatrix}0 & 0 & 10 & 90\\ 70 & 60 & 70 & 0\\ 0 & 0 & 100 & 0\end{pmatrix}$$

(для его записи мы отбрасываем столбец фиктивного потребителя $B_5$) оптимален и $F\left(X^*\right)=1580$. Как следствие неправильного баланса имеем, что от поставщика $A_3$ не вывезено 30 единиц груза.

**Пример 2.5.** В транспортной задаче, заданной таблицей 2.11, сумма запасов равна 310, а потребностей – 350. Поэтому необходимо ввести дополнительного поставщика $A_4$ с запасом 40 и тарифами перевозок 0 (см. таблицу 2.12).

Построим начальный план методом минимального тарифа и вычислим потенциалы. Легко видеть, что план не оптимален, максимальная положительная оценка равна 5, и вершинами цикла являются клетки $A_1B_1$, $A_2B_1$, $A_2B_4$, $A_3B_4$, $A_3B_2$ и $A_1B_2$. Получается цикл «с самопересечением», изображенный на рис. 2.3. Получаем, что $\Delta = \min(60,80) = 60$. Заметим, что после перестановки по циклу сразу в двух клетках получается нулевая перевозка.

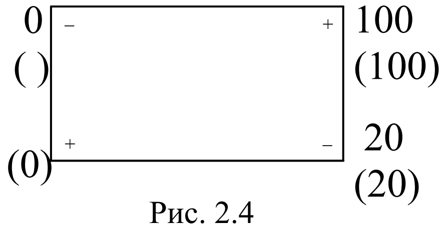


Рис. 2.4

| $u_j \ v_j$ | 3 | 8 | 1 | 10 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4<br>**60** | 14<br>$\boxed{-5}$ | 11<br>$\boxed{-9}$ | 18<br>$\boxed{-7}$ | 60 |
| 0 | 3<br>**0** | 17<br>$\boxed{-9}$ | 1<br>**30** | 10<br>**100** | 130 |
| 8 | 9<br>$\boxed{2}$ | 16<br>**100** | 11<br>$\boxed{-2}$ | 18<br>**20** | 120 |
| -10 | 0<br>$\boxed{-7}$ | 0<br>$\boxed{-2}$ | 0<br>$\boxed{-9}$ | 0<br>**40** | 40 |
| $b_j$ | 60 | 100 | 30 | 160 | |

Таблица 2.13

**Замечание 2.3.** Если после перестановки по циклу больше чем в одной клетке образуется нулевая перевозка, то одна из них становится свободной (желательно, с максимальным тарифом), а остальные считаются занятыми с нулевой перевозкой, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m + n - 1$.

Таким образом, получаем новый план, указанный в таблице 2.13. Имеется единственная клетка $A_2B_1$ с положительной оценкой, причем в цикле, изображенном на рисунке 2.4, одна из клеток, означенных минусом, имеет нулевую перевозку.

**Замечание 2.4.** Если занятая клетка с нулевой перевозкой попала в цикл и соответствует знаку “–“ (при этом $\Delta = 0$), то перестановка по циклу сводится к тому, что свободная клетка объявляется занятой с нулевой перевозкой, а занятая клетка с нулевой перевозкой становится свободной.

| $u_j \ v_j$ | 1 | 8 | 1 | 10 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4<br>**60** | 14<br>$\boxed{-3}$ | 11<br>$\boxed{-7}$ | 18<br>$\boxed{-5}$ | 60 |
| 0 | 3<br>$\boxed{-2}$ | 17<br>$\boxed{-9}$ | 1<br>**30** | 10<br>**100** | 130 |
| 8 | 9<br>**0** | 16<br>**100** | 11<br>$\boxed{-2}$ | 18<br>**20** | 120 |
| -10 | 0<br>$\boxed{-9}$ | 0<br>$\boxed{-2}$ | 0<br>$\boxed{-9}$ | 0<br>**40** | 40 |
| $b_j$ | 60 | 100 | 30 | 160 | |

Таблица 2.14

Таким образом, занятая нулевая и свободная клетки меняются местами (рис. 2.4). Проверяя план на оптимальность (таблица 2.14), убеждаемся, что все оценки отрицательны, $X^* = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 100 \\ 0 & 100 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ (мы отбрасываем строку фиктивного поставщика) оптимален, и $F\left(X^*\right) = 3230$. В результате получаем, что потребности потребителя $B_4$ удовлетворены не полностью.

**Задачи для самостоятельного решения**

Решить транспортные задачи методом потенциалов

26.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 7 | 4 | 7 | 100 |
| $A_2$ | 10 | 13 | 24 | 7 | 100 |
| $A_3$ | 8 | 19 | 12 | 18 | 200 |
| $b_j$ | 90 | 80 | 30 | 170 | |

27.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 13 | 12 | 3 | 60 |
| $A_2$ | 2 | 16 | 4 | 6 | 125 |
| $A_3$ | 13 | 4 | 17 | 16 | 75 |
| $b_j$ | 100 | 100 | 50 | 50 | |

28.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 6 | 2 | 4 | 75 |
| $A_2$ | 18 | 22 | 11 | 3 | 185 |
| $A_3$ | 18 | 9 | 6 | 11 | 90 |
| $b_j$ | 40 | 70 | 90 | 115 | |

29.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 11 | 3 | 7 | 4 | 95 |
| $A_2$ | 12 | 9 | 8 | 13 | 65 |
| $A_3$ | 23 | 14 | 3 | 8 | 130 |
| $b_j$ | 40 | 110 | 85 | 105 | |

30.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 14 | 7 | 2 | 17 | 100 |
| $A_2$ | 5 | 12 | 6 | 10 | 150 |
| $A_3$ | 9 | 2 | 3 | 12 | 120 |
| $b_j$ | 60 | 95 | 85 | 90 | |

31.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 12 | 7 | 14 | 120 |
| $A_2$ | 12 | 3 | 18 | 3 | 80 |
| $A_3$ | 23 | 1 | 3 | 21 | 70 |
| $b_j$ | 80 | 110 | 80 | 50 | |

## § 2.5. Определение оптимального плана транспортных задач с дополнительными ограничениями

При решении транспортных задач методом потенциалов возможно учитывать дополнительные ограничения на перевозки. Ниже перечислены варианты различных постановок транспортных задач и даны соответствующие методы сведения к закрытой транспортной задаче.

1. Если в закрытой транспортной задаче перевозки от поставщика $A_i$ к потребителю $B_j$ не могут быть осуществлены (*блокировка*), то для определения оптимального решения задач предполагают, что тариф перевозки единицы груза от $A_i$ к $B_j$ равен сколь угодно большому числу $M$.

2. Если дополнительным условием в транспортной задаче является обеспечение перевозки от поставщика $A_i$ к потребителю $B_j$ *в точности* $a_{ij}$ единиц груза, то в клетку $A_iB_j$ записывают указанное число $a_{ij}$, а эту клетку считают свободной со сколь угодно большим тарифом $M$.

3. Если от поставщика $A_i$ к потребителю $B_j$ должно быть перевезено *не менее* $a_{ij}$ единиц груза, что запасы пункта $A_i$ и потребности пункта $B_j$ полагают меньше фактических на $a_{ij}$ единиц. После нахождения оптимального плана перевозку, стоящую в клетке $A_iB_j$, увеличивают на $a_{ij}$ единиц.

4. Если от поставщика $A_i$ к потребителю $B_j$ требуется перевезти *не более* $a_{ij}$ единиц груза, то вводят дополнительного потребителя $B_{n+1} = B_{ij}$, которому записывают те же тарифы, что и для $B_j$, за исключением тарифа в $i$-ой строке, который считают равным сколь угодно большому числу $M$. Потребности пункта $B_j$ считают равными $a_{ij}$, а потребности $B_{ij}$ полагают равными $b_j - a_{ij}$.

| $u_i$ \ $v_j$ | 2 | 4 | 8 | 2 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -5 | 1 | 11 | 3 | 13 | 140 |
| 0 | 12 | 4 | 8 | 2 | 160 |
| 1 | 3 | 5 | 14 | 6 | 100 |
| $b_j$ | 80 | 40 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.15

**Пример 2.6.** Найти решение транспортной задачи, заданной таблицей 2.15, если из $A_3$ в $B_1$ и из $A_2$ в $B_3$ перевозки не могут быть осуществлены, из $A_1$ в $B_2$ должно быть завезено не менее 30 ед. груза, а из $A_2$ в $B_4$ ровно 70 ед.

| $u_i \backslash v_j$ | 1 | $7-M$ | 3 | -5 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 **80** | 11 $\boxed{-M-4}$ | 3 **30** | 13 $\boxed{-18}$ | 110 |
| $M-3$ | 12 $\boxed{M-14}$ | 4 **10** | $M$ **80** | 2 **70** | 160 |
| 11 | $M$ $\boxed{12-M}$ | 5 $\boxed{13-M}$ | 14 **40** | 6 **60** | 100 |
| $b_j$ | 80 | 10 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.16

Решение. Так как из $A_2$ в $B_1$ и из $A_3$ в $B_4$ перевозки не могут быть осуществлены, то в клетках $A_3B_1$ и $A_2B_3$ тарифы считаем равными некоторому большому числу $M$. В клетке $A_2B_4$ перевозку считаем равной 70, а тариф – равным $M$, и эту клетку в дальнейшем полагаем свободной. Кроме этого, запасы $A_1$ и потребности $B_2$ уменьшаем на 30.

Получаем таблицу 2.16, строим начальный опорный план методом минимального тарифа, находим потенциалы и оценки свободных клеток (см. таблицу 2.16). Имеем единственную положительную оценку $\Delta_{12} = M - 14$ и строим цикл, соединяющий клетки $A_1B_1$, $A_1B_3$, $A_2B_3$ и $A_2B_1$ (рис. 2.5). В клетках, означенных минусом, перевозки одинаковы, поэтому в соответствии с


Рис. 2.5

| $u_i \backslash v_j$ | 1 | -7 | 3 | -5 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 **0** | 11 $\boxed{-18}$ | 3 **110** | 13 $\boxed{-18}$ | 110 |
| 11 | 12 **80** | 4 **10** | $M$ $\boxed{14-M}$ | 2 **70** | 160 |
| 11 | $M$ $\boxed{12-M}$ | 5 $\boxed{-1}$ | 14 **40** | 6 **60** | 100 |
| $b_j$ | 80 | 10 | 150 | 130 | 400 |

Таблица 2.17

замечанием 2.3, клетку $A_1B_1$ считаем занятой с нулевой перевозкой, а $A_2B_3$ – свободной. После перестановки по циклу получаем новый план (таблица 2.17). Так как все оценки отрицательны, то данная таблица – заключительная. Увеличиваем перевозку в клетке $A_1B_2$ на 30, получим оптимальный план перевозок, удовлетворяющий всем ограничениям задачи: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 110 & 20 \\ 80 & 10 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 40 & 60 \end{pmatrix}$ и

$$F\left(X^*\right) = 3 \cdot 110 + 12 \cdot 80 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 70 + 14 \cdot 40 + 6 \cdot 60 = 2390.$$

| $u_i \backslash v_j$ | 1 | -1 | 3 | -3 | 1 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1<br>**50** | 11<br>$\boxed{-12}$ | 3<br>**20** | 13<br>$\boxed{-16}$ | 1<br>**30** | 100 |
| 5 | 12<br>$\boxed{-6}$ | 4<br>**40** | 8<br>**30** | 2<br>**90** | $M$<br>$\boxed{6-M}$ | 160 |
| $M$–3 | 7<br>$\boxed{M-9}$ | 5<br>$\boxed{M-9}$ | $M$<br>**100** | 6<br>$\boxed{M-12}$ | 7<br>$\boxed{M-9}$ | 100 |
| $b_j$ | 50 | 40 | 150 | 90 | 30 | 400 |

Таблица 2.18

**Пример 2.7.** Найти решение транспортной задачи, заданной таблицей 2.15, если из $A_3$ в $B_3$ перевозки запрещены, а из $A_2$ в $B_1$ должно быть завезено не более 50 ед. груза, а из $A_1$ в $B_4$ – не менее 40 ед. груза.

Решение. Так как из $A_3$ в $B_3$ перевозки запрещены, то тариф в $A_3B_3$ считаем равным $M$. Запасы $A_1$ и потребности $B_4$ уменьшаем на 40,

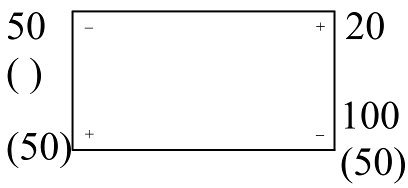



Рис. 2.6

а также вводим дополнительного потребителя $B_5$ с потребностями $80-50=30$. Соответственно, в клетке $A_3B_5$ стоимость перевозок считаем равной $M$, а потребности $B_1$ приравниваем к 50.

Получаем таблицу 2.18. Найдем начальное опорное решение методом минимального тарифа, потенциалы и оценки. Анализируя циклы, проходящие через клетки с максимальной положительной оценкой $M-9$, вибираем цикл, содержащий клетку $A_3B_1$, так как при этом перевозка в ячейке $A_3B_3$ максимально уменьшается. Итак, в результате перестановки по циклу, соединяющему клетки $A_3B_1$, $A_1B_1$, $A_1B_3$ и $A_3B_3$ (см. рис. 2.6), получаем новую таблицу 2.19.

| $u_i \backslash v_j$ | 15–$M$ | 4 | 8 | 2 | 6 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | 1<br>$\boxed{9-M}$ | 11<br>$\boxed{-12}$ | 3<br>**70** | 13<br>$\boxed{-16}$ | 1<br>**30** | 100 |
| 0 | 12<br>$\boxed{3-M}$ | 4<br>**40** | 8<br>**30** | 2<br>**90** | $M$<br>$\boxed{6-M}$ | 160 |
| $M$-8 | 7<br>**50** | 5<br>$\boxed{M-9}$ | $M$<br>**50** | 6<br>$\boxed{M-12}$ | 7<br>$\boxed{M-9}$ | 100 |
| $b_j$ | 50 | 40 | 150 | 90 | 30 | 400 |

Таблица 2.19

Опять получаем две ячейки с максимальной положительной оценкой $\Delta_{32}=\Delta_{34}=M-9$. Так как для цикла с началом в $A_3B_2$ перевозка в клетке $A_3B_3$ уменьшается на 40, а для цикла с началом

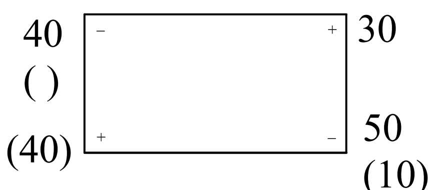



Рис. 2.7

в $A_3B_4$ эта же перевозка уменьшается лишь на 30, то для получения нового опорного плана выбираем цикл, содержащий ячейки $A_3B_2$, $A_2B_2$, $A_2B_3$ и $A_3B_3$. Перестановка по циклу изображена на рисунке 2.7, а новый план – в таблице 2.20.

После очередного перехода по циклу, проходящему через клетки $A_3B_5$, $A_3B_3$, $A_1B_3$ и $A_1B_5$, получим таблицу 2.21. Как легко проверить, все оценки здесь не положительны, и опорный план, определяемый таблицей 2.21, является заключительным. Данная таблица – заключительная, и, увеличивая перевозку в клетке $A_1B_4$ на 40, а также объединяя перевозки, записанные в соответствующих клетках столбцов $B_1$ и $B_5$, получим оптимальный план перевозок $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 40 \\ 0 & 0 & 70 & 90 \\ 60 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи, и

$$z(X^*) = 1\cdot 20 + 3\cdot 80 + 13\cdot 40 + 8\cdot 70 + 2\cdot 90 + 7\cdot 60 + 5\cdot 40 = 2140.$$

| $u_i$ \ $v_j$ | 7 | 5 | $M$ | $M$–6 | $M$–2 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3–$M$ | 1 $\boxed{9-M}$ | 11 $\boxed{3-M}$ | 3 **70** | 13 $\boxed{-16}$ | 1 **30** | 100 |
| 8–$M$ | 12 $\boxed{3-M}$ | 4 $\boxed{9-M}$ | 8 **70** | 2 **90** | $M$ $\boxed{6-M}$ | 160 |
| 0 | 7 **50** | 5 **40** | $M$ **10** | 6 $\boxed{M-12}$ | 7 $\boxed{M-9}$ | 100 |
| $b_j$ | 50 | 40 | 150 | 90 | 30 | 400 |

Таблица 2.20

| $u_i$ \ $v_j$ | 7 | 5 | 9 | 3 | 7 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -6 | 1 $\boxed{0}$ | 11 $\boxed{-12}$ | 3 **100** | 13 $\boxed{-16}$ | 1 $\boxed{0}$ | 100 |
| -1 | 12 $\boxed{-6}$ | 4 **20** | 8 **50** | 2 **90** | $M$ $\boxed{6-M}$ | 160 |
| 0 | 7 **50** | 5 **20** | $M$ $\boxed{9-M}$ | 6 $\boxed{-3}$ | 7 **30** | 100 |
| $b_j$ | 50 | 40 | 150 | 90 | 30 | 400 |

Таблица 2.21

**Замечание 2.5.** Поскольку решение задачи связано с разделением перевозок одному из потребителей на несколько столбцов, а затем их объединением, то число занятых клеток в оптимальном плане может быть больше, чем $m+n-1$. Так, для задачи примера 2.7, в окончательном плане транспортной задачи $3\times 4$, мы имеем 7 занятых клеток.

**Замечание 2.6.** Нулевая оценка одной или нескольких свободных клеток говорит о наличии альтернативных решений исходной задачи. Так, рассмотрим цикл $A_2B_2$, $A_2B_3$, $A_1B_3$, $A_1B_5$, $A_3B_5$ и $A_3B_2$, проходящий через ячейку $A_2B_2$ с нулевой оценкой (рис. 2.8).

В результате перестановки по циклу с $\Delta = 20$, получим новую таблицу 2.22, которая дает новый оптимальный план

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 40 \\ 0 & 20 & 50 & 90 \\ 80 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющий всем ограничениям задачи. Как и следовало ожидать, суммарная стоимость перевозок

$$z\left(X_1^*\right) = 3 \cdot 100 + 13 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 50 + 2 \cdot 90 + 7 \cdot 80 + 5 \cdot 20 = 2140$$

равна $z\left(X^*\right)$.

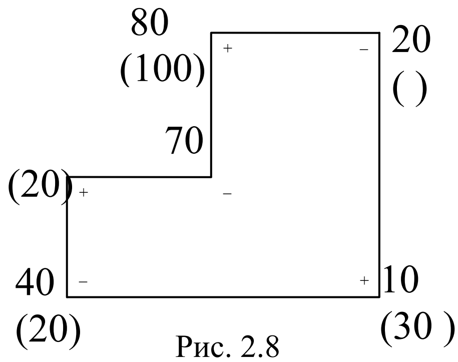



Рис. 2.8

## Задачи для самостоятельного решения

32. Найти решение транспортной задачи с таблицей

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 7 | 9 | 100 |
| $A_2$ | 16 | 5 | 12 | 4 | 100 |
| $A_3$ | 8 | 11 | 12 | 5 | 200 |
| $b_j$ | 80 | 110 | 90 | 120 | |

, если из $A_1$ в $B_2$ и из $A_2$ в $B_3$ перевозки не могут быть осуществлены.

33. Найти решение транспортной задачи с таблицей

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 14 | 6 | 21 | 120 |
| $A_2$ | 20 | 13 | 17 | 14 | 90 |
| $A_3$ | 8 | 21 | 6 | 7 | 180 |
| $b_j$ | 95 | 110 | 80 | 70 | |

, если из $A_3$ в $B_2$ перевозки не могут быть осуществлены, а из $A_1$ в $B_4$ должно быть перевезено 70 ед. груза.

34. Найти решение транспортной задачи с таблицей

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 7 | 12 | 16 | 11 | 150 |
| $A_2$ | 8 | 2 | 4 | 2 | 140 |
| $A_3$ | 9 | 15 | 16 | 7 | 110 |
| $b_j$ | 75 | 145 | 120 | 60 | |

, если из $A_2$ в $B_4$ перевозки запрещены, из $A_1$ в $B_3$ должно быть доставлено не менее 40 ед. груза, а из $A_3$ в $B_1$ – не более 50 ед. груза.

35. Найти решение транспортной задачи с таблицей

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 10 | 7 | 10 | 140 |
| $A_2$ | 4 | 9 | 19 | 25 | 105 |
| $A_3$ | 6 | 4 | 5 | 2 | 115 |
| $b_j$ | 60 | 130 | 55 | 115 | |

, если из $A_2$ в $B_1$ перевозки запрещены, из $A_1$ в $B_2$ должно быть перевезено 50 ед. груза, а из $A_3$ в $B_4$ – не более 20 ед. груза.

36. Найти решение транспортной задачи с таблицей

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 9 | 6 | 7 | 11 | 70 |
| $A_2$ | 3 | 14 | 25 | 19 | 170 |
| $A_3$ | 2 | 8 | 17 | 10 | 140 |
| $b_j$ | 90 | 60 | 160 | 70 | |

, если из $A_1$ в $B_4$ должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из $A_3$ в $B_3$ должно быть перевезено не менее 30 ед. груза, а из $A_2$ в $B_2$ – 40 ед. груза.

37. Найти решение транспортной задачи с таблицей

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 12 | 14 | 11 | 20 | 90 |
| $A_2$ | 3 | 4 | 5 | 9 | 155 |
| $A_3$ | 2 | 18 | 14 | 12 | 125 |
| $b_j$ | 100 | 75 | 75 | 120 | |

, если из $A_1$ в $B_4$ должно быть перевезено не менее 40 ед. груза, из $A_2$ в $B_3$ – не более 50 ед. груза, а из $A_3$ в $B_1$ – не менее 60 ед. груза.

# Глава 3
# Метод искусственного базиса

Основной целью данной главы является изложение решения задач линейного программирования методом искусственного базиса, который удобен в случае, если в исходной задаче не выделен допустимый базис. Начнем же с напоминания алгоритма решения задач линейного программирования симплекс-методом.

## 3.1. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Сформулируем сначала общий алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом. Предположим, система ограничений приведена к каноническому виду, в ней выделен допустимый базис (все правые части – неотрицательные числа), из целевой функции исключены базисные переменные и все слагаемые, кроме константы, перенесены в левую часть. Записав все данные в симплекс-таблицу, получим (далее предполагается, что рассматривается задача на максимум, а альтернатива в скобках дана для задачи на минимум)

1. Если в последней строке нет отрицательных (положительных) оценок, то оптимальное решение достигнуто.

2. Если в оценочной строке есть хотя бы одна отрицательная (положительная) оценка, то решение может быть улучшено. Для этого выбирается разрешающий столбец (пусть он имеет номер $j$), содержащий отрицательную (положительную) оценку, а в качестве разрешающего выбирается положительный элемент $a_{lj} > 0$, дающий минимум отношения элемента свободного столбца $b_i$ к $a_{ij}$: $a_{lj} = \min\limits_{a_{ij}>0} \left\{ \dfrac{b_i}{a_{ij}} \right\}$.

3. Если в симплекс—таблице имеется отрицательная (положительная) оценка, а в соответствующем столбце нет положительных элементов, то исходная задача не имеет решения, т.е. $z_{\max} = +\infty$ $(z_{\min} = -\infty)$.

Если оптимальное решение найдено, но при этом у одной (или нескольких) свободной переменной оценка равна $0$, то задача имеет альтернативное решение, для получения которого следует сделать шаг симплекс-метода, выбрав разрешающий элемент (по общему правилу) в столбце с нулевой оценкой.

**Пример 3.1.** Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} z = 3x_1 + 3x_2 + 21 \to \max \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7, \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

симплексным методом.

Решение. Задача приведена к каноническому виду, допустимый базис уже выделен (переменные $x_3, x_4, x_5$) и из целевой функции исключены базисные переменные. Поэтому переписываем функцию $z$ в виде $z - 3x_1 - 3x_2 = 21$ и формируем симплекс-таблицу

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 3 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 7 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 21 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 |

В последней строке есть отрицательные элементы, поэтому решение может быть улучшено. Вводим в базис переменную $x_2$, а так как $\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{7}{1}\right\} = 1$, выводим из базиса переменную $x_3$.

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 4 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 2 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 |
| $z$ | 24 | -9 | 0 | 3 | 0 | 0 |

Так как в строке оценок есть единственный отрицательный элемент, а выбор разрешающего элемента однозначен, то выводим из базиса переменную $x_5$ и вводим в базис переменную $x_1$. Делим разрешающую строку на $3$, и после шага симплекс-метода получаем

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 5 | 0 | 1 | 1/3 | 0 | 2/3 |
| $x_4$ | 6 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | 1/3 |
| $x_1$ | 2 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 |
| $z$ | 42 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |

В последней строке нет отрицательных элементов, поэтому оптимальным решением является базисное решение $X_1 = (2,5,0,6,0)$ и $z_{\max} = z(X_1) = 42.$

С другой стороны, в столбце свободной переменной $x_3$ в строке оценок есть нулевая оценка, а, значит, имеется альтернативное решение. Для того чтобы его найти, выбираем по общему правилу разрешающий элемент в этом столбце: так как $\min\left\{\frac{5}{1/3}, \frac{6}{2/3}\right\} = \frac{6}{2/3}$, умножаем вторую строку на $3/2$, получаем

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 5 | 0 | 1 | 1/3 | 0 | 2/3 |
| $x_4$ | 9 | 0 | 0 | 1 | 3/2 | 1/2 |
| $x_1$ | 2 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 |
| $z$ | 42 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |

и делаем шаг симплекс—метода (вводим в базис $x_3$ и выводим из базиса переменную $x_4$)

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 1/2 |
| $x_3$ | 9 | 0 | 0 | 1 | 3/2 | 1/2 |
| $x_1$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 |
| $z$ | 42 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |

и альтернативным оптимальным решением является $X_2 = (5,2,9,0,0)$. Заметим, что других альтернатив нет, так как, вводя в базис переменную $x_4$, мы вновь получаем альтернативное решение $X_1$. Итак, оптимальным множеством исходной задачи является отрезок, соединяющий точки $X_1$ и $X_2$:

$$X^* = (1-t)X_1 + tX_2 = (1-t)\left(2,5,0,6,0\right) + t\left(5,2,9,0,0\right) =$$
$$= \left(2+3t, 5-3t, 9t, 6-6t, 0\right), t \in \left[0,1\right].$$

Получаем, что $z_{\max} = 42$ при $X^* = \left(2+3t, 5-3t, 9t, 6-6t, 0\right), t \in \left[0,1\right]$.

### Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи линейного программирования симплексным методом

38. $z = 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + 9 \to \max$ при $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_3 + 2x_5 = 4, \\ \overline{x} > 0. \end{cases}$

39. $z = x_1 - 4x_2 - 2x_4 + x_5 - 11 \to \min$ при $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ \overline{x} > 0. \end{cases}$

40. $z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 - 13 \to \min$ при $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -5x_1 - 3x_2 - x_4 = -25, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6, \\ \overline{x} > 0. \end{cases}$

41. $z = 3x_2 + x_4 + 8 \to \max$ при $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ \overline{x} > 0. \end{cases}$

42. $z = -x_1 - x_3 - 10 \to \min$ при $\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ \overline{x} > 0. \end{cases}$

43. $z = 2x_2 - x_4 + 12 \to \max$ при $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 = 8, \\ \overline{x} > 0. \end{cases}$

## 2.2. Метод искусственного базиса

Если в исходной системе ограничений не выделен допустимый базис, как того требует алгоритм симплекс—метода, для его нахождения можно решить вспомогательную задачу, которая ставится следующим образом.

Пусть исходная система нетривиальных ограничений задана в общем виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $b_i \geq 0, i = 1,\ldots,m.$ Выполнения последнего условия всегда можно добиться, умножив уравнения на $-1$. Введем в систему новые (искусственные) переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \end{cases}$$

так что новая система имеет допустимое базисное решение $(0,0,\ldots,0;b_1,b_2,\ldots,b_m) \in \mathrm{R}^{n+m}$. Рассмотрим вспомогательную целевую функцию $F(x_1,x_2,\ldots,x_n;y_1,y_2,\ldots,y_m) = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ и решим симплекс-методом задачу

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{cases}$$

Если последняя задача имеет решение, то возможны два случая:

1. Если $\min F > 0$, то система ограничений не имеет допустимого базиса и задача не имеет решений.

2. Если $\min F = 0$, то система ограничений имеет неотрицательное базисное решение. Чтобы получить систему ограничений, эквивалентную исходной, но с выделенным допустимым базисом, необходимо, чтобы в заключительной симплекс—таблице все искусственные переменные были свободными.

**Пример 3.2.** Решить задачу

$$\begin{cases} z = x_1 + 3x_2 + 8 \to \min \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 19, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 33, \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

симплекс-методом.

Решение. В данной задаче допустимый базис выделен лишь частично $(\text{переменные } x_3, x_5)$, поэтому ограничимся лишь введением одной искусственной переменной $y$ и решим следующую задачу

$$\begin{cases} F = y \to \min, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + y = 19, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 33 \end{cases}$$

Так как $F = y = 19 - x_1 - 3x_2 + x_4$, то $F + x_1 + 3x_2 - x_4 = 19$. Аналогично, $z = x_1 + 3x_2 + 10$, и $z - x_1 - 3x_2 = 10$. Решая задачу для функции $F$, внесем в таблицу строку для функции $z$, одновременно преобразуя и ее. Получим

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $y$ | 19 | 1 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 33 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $z$ | 8 | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $F$ | 19 | 1 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 |

Сделаем шаг симплекс—метода с выделенным разрешающим элементом

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $y$ | 16 | 4 | 0 | -3 | -1 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 32 | 4 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $z$ | 11 | -4 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| $F$ | 16 | 4 | 0 | -3 | -1 | 0 | 0 |

Выводим из базиса переменную $y$ и вводим в базис $x_1$.

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 5 | 0 | 1 | 1/4 | -1/4 | 0 | 1/4 |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | -3/4 | -1/4 | 0 | 1/4 |
| $x_5$ | 16 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | -1 |
| $z$ | 27 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $F$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

Вспомогательная задача $F \to \min$ решена и искусственная переменная $y$ – свободная. Поэтому опускаем последнюю строку и столбец, и получаем симплекс-таблицу для исходной задачи с выделенным допустимым базисом:

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 5 | 0 | 1 | 1/4 | -1/4 | 0 |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | -3/4 | -1/4 | 0 |
| $x_5$ | 16 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| $z$ | 27 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |

Более того, данная симплекс-таблица – заключительная, поэтому решением задачи является $X_1 = \left(4,5,0,0,16\right)$, а так как имеется свободный столбец $x_3$ с нулевой оценкой, то у задачи есть альтернативное решение. Выводим из базиса переменную $x_5$ и вводим в базис $x_3$:

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | -3/8 | -1/8 |
| $x_1$ | 10 | 1 | 0 | 0 | 1/8 | 3/8 |
| $x_5$ | 8 | 0 | 0 | 1 | 1/2 | 1/2 |
| $z$ | 27 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |

и получаем альтернативное решение $X_2 = (10,3,8,0,0)$. Поэтому общее решение задачи

$$X^* = \left(1-t\right)X_1 + tX_2 = \left(1-t\right)\left(4,5,0,0,16\right) + t\left(10,3,8,0,0\right) =$$

$$= \left(4+6t, 5-2t, 8t, 0, 16-16t\right), t \in \left[0,1\right]$$

и $z_{\min} = z\left(X^*\right) = 27$.

**Пример 3.3.** Решить задачу

$$\begin{cases} z = x_1 + 2x_2 + 9 \to \max \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_5 = 3, \\ \overline{x} \geq 0. \end{cases}$$

симплекс-методом.

Решение. Вводим две искусственные переменные $y_1, y_2$ и решим следующую задачу

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 \to \min \\ x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_5 + y_2 = 3, \\ \overline{x} \geq 0, \overline{y} \geq 0. \end{cases}$$

Из системы ограничений преобразуем $F = y_1 + y_2 = 5 - 2x_2 + x_3 + x_5$, т.е. $F + 2x_2 - x_3 - x_5 = 5$. Аналогично, $z - x_1 - 2x_2 = 9$ и мы решаем задачу для функции $F$, включив при этом в таблицу строку для функции $z$:

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 2 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_2$ | 3 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $z$ | 9 | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $F$ | 5 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 |

В строке оценок есть единственный положительный элемент, поэтому вводим в базис $x_2$ и выводим из базиса $x_5$

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 7/4 | 3/4 | 0 | -1 | -1/4 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 1/4 | 1/4 | 1 | 0 | 1/4 | 0 | 0 | 0 |
| $y_2$ | 11/4 | -5/4 | 0 | 0 | -1/4 | -1 | 0 | 1 |
| $z$ | 19/2 | -1/2 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 0 |
| $F$ | 9/2 | -1/2 | 0 | -1 | -1/2 | -1 | 0 | 0 |

Все элементы строки оценок для задачи $F \to \min$ отрицательны, поэтому симплекс—таблица – заключительная, но, так как $\min F = 9/2 > 0$, то исходная задача не имеет ни одного допустимого базиса и решений не имеет.

### Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи линейного программирования, используя метод искусственного базиса

44. $z = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 7 \to \min$ при $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 3x_4 = 14, \\ 9x_2 + 12x_3 + 3x_4 = 12, \\ \overline{x} \ge 0. \end{cases}$

45. $z = 6x_2 + x_3 - x_4 + 13 \to \max$ при $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ \overline{x} \ge 0. \end{cases}$

46. $z = 6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 8 \to \max$ при $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ \overline{x} \ge 0. \end{cases}$

47. $z = -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - 8 \to \min$ при $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16, \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3, \\ \overline{x} \ge 0. \end{cases}$

48. $z = 7x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 + 24 \to \max$ при $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11, \\ \overline{x} \ge 0. \end{cases}$

49. $z = 7x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 17 \to \min$ при $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 9x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 26, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 3, \\ \overline{x} \ge 0. \end{cases}$

50. $z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + 29 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17, \\ \overline{x} \geq 0. \end{cases}$

51. Суточная потребность человека в витаминах и минеральных веществах удовлетворяется за счет потребления двух продуктов – киви и гранатов. Содержание питательных веществ в продуктах (мг/100 г), суточные нормы их потребления (мг) и цена продуктов (руб. за 100 г) задаются таблицей

| | Витамины | Мин. вещества | Цена |
|---|---|---|---|
| Киви | 2 | 1 | 10 |
| Гранаты | 1 | 3 | 20 |
| Норма | 24 | 27 | |

При этом гранат должно быть не более 800 г. Составить математическую модель задачи и найти суточный рацион минимальной стоимости.

# Глава 4
# Задачи целочисленного программирования

## 4.1. Постановка задачи. Графический метод решения

Основным отличием постановки задачи целочисленного программирования от задачи линейного программирования является то, что значения переменных, составляющих оптимальное решение задачи целочисленного программирования, должны быть *целыми* неотрицательными числами.

Итак, требуется найти минимальное (максимальное) значение линейной функции

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \min \ (\max)$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

а также при условии неотрицательности и целочисленности переменных $x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathrm{Z}, \quad j = 1, \ldots, n.$

Поясним графический метод решения задачи целочисленного программирования на примере следующей задачи.

**Пример 4.1**. Решить задачу целочисленного программирования с целевой функцией $z = x + 2y + 1 \to \max$ и ограничениями

$$\begin{cases} y - x \leq 4, \\ y + x \leq 7, \\ x \geq 0, y \geq 0; x, y \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Решение. Строим область на плоскости $(x, y)$, определяемую системой ограничений (рис. 4.1), игнорируя пока условие целочисленности $x$ и $y$. Получаем четырехугольник $OABC$ с угловыми точками $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(3/2, 11/2)$ и $C(7,0)$; при этом все решения системы ограничений задачи суть точки с целочисленными координатами на границе и внутри этого четырехугольника.

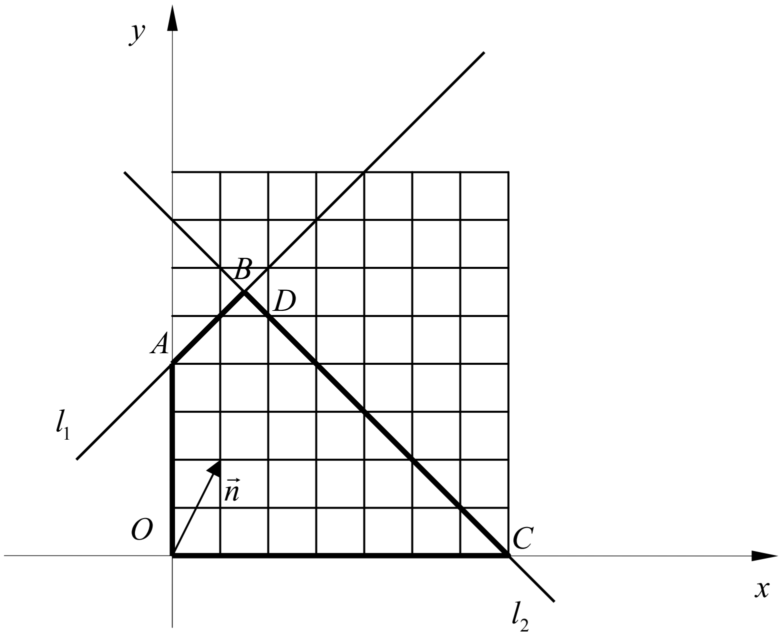



Рис. 4.1

Чтобы найти точку, в которой функция $z$ достигает максимума, как и при решении графическим методом задач линейного программирования, строим вектор нормали $\vec{n} = (4, 8)$ (удобнее взять сонаправленный ему вектор $\vec{m} = (1, 2)$). Перемещая линию уровня в направлении вектора $\vec{m}$ и рассматривая в качестве возможных решений лишь точки с целочисленными координатами, убеждаемся, что максимум $z$ достигается в точке $D(2,5)$ и $z_{\max} = z(D) = 52$.

Заметим, что соответствующим решением задачи линейного программирования без условия целочисленности будет точка $B$ и $z(B) = 54$.

Ясно, что решение задач целочисленного программирования графическим способом возможно не всегда. В общем случае существует несколько методов решения данных задач, наиболее распространенным из которых является метод сечений (метод Гомори). Перед тем как перейти к изложению метода Гомори, рассмотрим, как задачи линейного программирования решаются с помощью двойственного симплекс-метода.

## Задачи для самостоятельного решения

Графическим методом найти решения следующих задач целочисленного программирования:

52. $z = 3x_1 + 7x_2 + 3 \to \max$ при $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$

53. $z = 2x_1 + 3x_2 + 7 \to \min$ при $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$

54. $z = 3x_1 + x_2 + 4 \to \min$ при $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38, \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$

55. $z = 5x_1 + 7x_2 - 12 \to \min$ при $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$

56. $z = x_1 + x_2 + 3 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ \overline{x} \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$

57. $z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 8 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22, \\ \overline{x} \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$

## 4.2. Двойственный симплекс-метод

Двойственный симплекс-метод, как и обычный симплекс-метод, используется для решения задач линейного программирования. Но, в отличие от обычного симплекс-метода, его можно применять и в случае, если свободные члены системы нетривиальных ограничений являются отрицательными числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагаются неотрицательными).

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0, \; j = 1,..,n. \end{cases}$$

Присоединим к системе ограничений целевую функцию $z$, исключив из нее базисные переменные и записав ее в виде уравнения

$$z + \Delta_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \Delta_n x_n = \Delta_0.$$

Напомним, что, коэффициенты $\Delta_j, j = 1, \ldots, n$ называются *оценками* соответствующих переменных $x_j$.

Заметим, что среди чисел $b_i$ могут быть отрицательные. При этом, хотя точка $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ является решением системы нетривиальных ограничений, она не является планом исходной задачи, так как среди ее координат имеются отрицательные числа.

**Определение 4.1.** *Решение* $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ *системы нетривиальных ограничений называется* ***псевдопланом (псевдорешением)*** *задачи линейного программирования, если* $\Delta_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$.

Основными предпосылками для решения задачи линейного программирования двойственным симплекс-методом являются следующие две теоремы.

**Теорема 4.1.** *Если в псевдоплане* $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, *есть хотя бы одно отрицательное число* $b_i < 0$ *такое, что все* $a_{ij} \geq 0$ *при* $i = 1, \ldots, m$, *то задача не имеет решений.*

**Теорема 4.2.** *Если в псевдоплане* $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, *имеются отрицательные числа* $b_i < 0$ *такие, что для любого из них существуют числа* $a_{ij} < 0$, *то можно перейти к новому псевдоплану, при котором значение целевой функции задачи не уменьшится.*

Сформулированные теоремы дают основание для построения алгоритма двойственного симплекс-метода.

Пусть $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ – псевдоплан исходной задачи. На основе условия задачи составляем симплекс-таблицу, в которой элементы свободного столбца могут быть отрицательными числами:

| базис | $b_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_l$ | $\ldots$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $\ldots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $b_1$ | 1 | 0 | $\ldots$ | 0 | $\ldots$ | 0 | $a_{1,m+1}$ | $\ldots$ | $a_{1n}$ |
| $x_2$ | $b_2$ | 0 | 1 | $\ldots$ | 0 | $\ldots$ | 0 | $a_{2,m+1}$ | $\ldots$ | $a_{2n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_l$ | $b_l$ | 0 | 0 | $\ldots$ | 1 | $\ldots$ | 0 | $a_{l,m+1}$ | $\ldots$ | $a_{l,n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ldots$ | 0 | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_m$ | $b_m$ | 0 | 0 | $\ldots$ | 0 | $\ldots$ | 1 | $a_{m,m+1}$ | $\ldots$ | $a_{mn}$ |
| $z$ | $\Delta_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\Delta_{m+1}$ | $\ldots$ | $\Delta_n$ |

1. Проверяем псевдоплан на оптимальность. Если $b_i \geq 0$ ($i = 1,\ldots,m$), то, так как, по предположению, все $\Delta_j \geq 0$, псевдоплан $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ будет оптимальным решением исходной задачи. Если же в столбце свободных членов имеются отрицательные числа, то либо устанавливаем неразрешимость задачи (на основании теоремы 1), либо переходим к новому псевдоплану.

2. Выбираем разрешающую строку как содержащую наибольшее по абсолютной величине отрицательное число в столбце свободных членов (пусть это строка со свободным членом $b_l$). Для выбора разрешающего столбца находим минимум модуля отношения элементов строки оценок к *отрицательным* элементам $l$-ой строки, т.е. находим $\min(-\Delta_j / a_{lj})$, где $a_{lj} < 0$. Пусть это минимальное значение принимается при $j = r$, тогда в базис вводят переменную $x_r$, а число $a_{lr}$ является разрешающим элементом. Переход к новой симплекс-таблице производят по обычным правилам симплексного метода.

3. Находим новый псевдоплан и переходим к пункту 1.

**Пример 4.2.** Найти максимальное значение функции $z = x_1 + x_2 + 2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем исходную задачу линейного программирования в канонической форме, введя балансовые переменные $x_4, x_5$, а затем перепишем ее так, чтобы коэффициенты при базисных переменных были равны 1.

$$z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max \qquad\qquad z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,5. \end{cases} \text{, то есть} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,5. \end{cases}$$

Исключив из целевой функции $x_3$, получаем следующую симплекс-таблицу

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | -4 | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | -6 | -1 | -2 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 16 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Так как в столбце свободных членов имеются два отрицательных числа $-4$ и $-6$, а в последней строке нет отрицательных чисел, то в соответствии с алгоритмом двойственного симплекс-метода переходим к новой симплекс-таблице. Заметим, что в данном случае это можно сделать, так как в строках, содержащих отрицательные свободные члены ($-4$ и $-6$) есть отрицательные числа. Так как наибольшее по модулю отрицательное число в столбце свободных членов есть $-6$, то исключаем из базиса переменную $x_5$. Чтобы определить разрешающий столбец, находим $\min\left\{-\frac{1}{-1}, -\frac{1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}$, т.е. минимальное отношение элементов строки оценок к отрицательным числам разрешающей строки (с противоположным знаком) дает столбец $x_2$. Умножаем третью строку на $-1/2$ и переходим к новой симплекс-таблице

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 5 | 1/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 |
| $x_4$ | -7 | -3/2 | 0 | 0 | 1 | 1/2 |
| $x_2$ | 3 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | -1/2 |
| $z$ | 13 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1/2 |

Аналогично, так как в свободном столбце последней таблицы есть отрицательное число $-7$, то рассмотрим элементы второй строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное $-3/2$. Если бы такое число отсутствовало, то исходная задача была бы неразрешима. Выбор разрешающего элемента здесь однозначен, умножаем вторую строку на $-2/3$ и переходим к новой симплекс-таблице

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 8/3 | 0 | 0 | 1 | 1/3 | 2/3 |
| $x_1$ | 14/3 | 1 | 0 | 0 | -2/3 | -1/3 |
| $x_2$ | 2/3 | 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/3 |
| $z$ | 32/3 | 0 | 0 | 0 | 1/3 | 2/3 |

Таким образом, в последней строке и в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, поэтому план $X^* = \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ является оптимальным и $z_{\max} = z(X^*) = 32/3$.

## Задачи для самостоятельного решения

Двойственным симплекс-методом найти решения следующих задач линейного программирования:

58. $z = -x_1 - 10x_2 + 10 \to \max$ при $\overline{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_5 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 = -1. \end{cases}$

59. $z = -2x_2 - 4x_4 - 3 \to \max$ при $\overline{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -1, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_2 - 4x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

60. $z = -5x_2 - 4x_3 + 4 \to \max$ при $\overline{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_5 = -11, \\ -2x_2 + 3x_3 - x_5 = -9, \\ -x_2 + x_4 = -2. \end{cases}$

61. $z = -2x_1 - 6x_3 + 44 \to \max$ при $\overline{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 = -17, \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = -9, \\ -x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

62. $z = -5x_4 - 7x_5 - 7 \to \max$ при $\overline{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_5 = -7, \\ -x_3 + 3x_4 - 6x_5 = -3, \\ -x_2 - x_4 - 4x_5 = -11. \end{cases}$

63. $z=-x_2-3x_3 \to \max$ при $\overline{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -x_2-6x_3+x_4=-5, \\ x_1+5x_2-19x_3=-13, \\ 3x_2-6x_3+x_5=-2. \end{cases}$

## 4.3. Метод Гомори

Решение задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана исходной задачи без учета целочисленности переменных. Если среди его компонент нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования. Если же в оптимальном плане задачи переменная $x_k$, по условию целочисленная, принимает дробное значение, то к системе ограничений добавляют неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \tilde{a}_{ij} \right\} x_j \ge \left\{ \tilde{b}_i \right\},$$

где $\{a\}$ обозначает дробную часть числа $a$, а числа $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ взяты из последней симплекс таблицы из строки, содержащей переменную $x_k$ как базисную. Если же дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство определяется числом с наибольшей дробной частью. Затем, используя двойственный симплекс-метод, находят решение исходной задачи.

**Замечание 4.1.** *Под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число такое, что разность a и b есть целое. Например,* $\{1,75\}=0,75$; $\{-3,35\}=0,65$.

Если в найденном плане задачи переменные опять принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют. Проводя конечное число итераций, либо получают оптимальный план задачи целочисленного программирования, либо устанавливают ее неразрешимость.

Решим теперь задачу из примера 4.1 методом Гомори.

**Пример 4.3**. Решить методом Гомори задачу

$$z=4x_1+8x_2+4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1+x_2 \le 4, \\ x_1+x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Приведем задачу к каноническому виду

$$z = 4x_1 + 8x_2 + 4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

и решим задачу симплекс-методом (игнорируя условие целочисленности). Выпишем исходную симплекс-таблицу.

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 4 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 7 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $z$ | 4 | -4 | -8 | 0 | 0 |

В последней строке есть два отрицательных числа, поэтому опорное решение $X = (0, 0, 4, 7)$ не является оптимальным. Вводим в базис переменную $x_2$, и, в соответствие с правилами симплекс-метода, выводим из базиса $x_3$

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 4 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 3 | 2 | 0 | -1 | 1 |
| $z$ | 36 | -12 | 0 | 8 | 0 |

Теперь разрешающий элемент выбирается однозначно. Разделив вторую строчку на $2$, сделаем еще один шаг симплекс-метода.

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 11/2 | 0 | 1 | 1/2 | 1/2 |
| $x_1$ | 3/2 | 1 | 0 | -1/2 | 1/2 |
| $z$ | 54 | 0 | 0 | 2 | 6 |

Итак, план $X = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0\right)$ является оптимальным для исходной задачи без учета условия целочисленности, но так как обе компоненты $x_1$ и $x_2$ являются дробными, то $X$ не является оптимальным решением задачи целочисленного программирования. Далее, так как дробные части равны между собой, то дополнительное ограничение составляется для одной из них (например, для переменной $x_2$). Выписывая соответствующую строку (первую) из последней симплекс таблицы, получаем

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{11}{2},$$

и к системе ограничений добавляем неравенство

$$\{1\}x_2 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_4 \ge \left\{\frac{11}{2}\right\}, \text{ т.е. } \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \ge \frac{1}{2},$$

или, окончательно, $x_3 + x_4 \ge 1$. Вводим балансовую переменную $x_5$, переписываем последнее условие в виде $x_3 + x_4 - x_5 = 1$, или $-x_3 - x_4 + x_5 = -1$, и добавляем его к заключительной симплекс-таблице. Получаем

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 11/2 | 0 | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 |
| $x_1$ | 3/2 | 1 | 0 | -1/2 | 1/2 | 0 |
| $x_5$ | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| $z$ | 54 | 0 | 0 | 2 | 6 | 0 |

Поскольку в свободном столбце имеется отрицательный элемент, то для решения задачи применяем двойственный симплекс-метод. Чтобы определить разрешающий столбец, находим $\min\left\{-\frac{2}{-1}, -\frac{6}{-1}\right\} = 2$, т.е. минимальное отношение дает столбец переменной $x_3$. Умножаем третью строку на $-1$, и делаем шаг симплекс-метода

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/2 |
| $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1/2 |
| $x_5$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| $z$ | 52 | 0 | 0 | 0 | 4 | 2 |

Получаем заключительную симплекс-таблицу, из которой, опуская балансовые переменные $x_3, x_4, x_5$, заключаем, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $X^* = (5, 2)$. При этом значение целевой функции равно $z_{\max} = 52$.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения $x_3 + x_4 \ge 1$. Допустимая область при отсутствии условия целочисленности построена выше в примере 4.1. Теперь из условий задачи

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$$

выразим переменные $x_3, x_4$

$$\begin{cases} x_3 = 4 + x_1 - x_2, \\ x_4 = 7 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

и подставим в неравенство. Получим $x_3 + x_4 = 11 - 2x_2 \geq 1$, т.е. $x_2 \leq 5$.

Полуплоскость, заданная последним условием $x_2 \leq 5$ (прямая $l_3$ на рисунке 4.2 задает границу этой полуплоскости $x_2 = 5$), отсекает от четырехугольника $OABC$ треугольник $BDE$, не содержащий целочисленных решений. Максимальное значение функции $z$ следует искать в области, ограниченной многоугольником $OAEDC$.

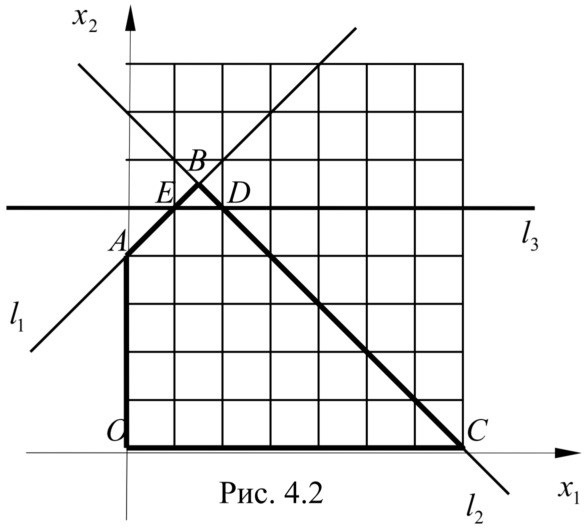



Рис. 4.2

Геометрическая интерпретация метода Гомори объясняет его другое название – метод сечений.

**Пример 4.4.** Для увеличения прибыли компания приняла решение о приобретении нового оборудования, выделив на это 19/3 у.е. и предоставив площадь 10 кв. м. При этом оборудование может быть заказано двух типов. Приобретение оборудования первого типа обойдется в 2 у.е. за 1 комплект, занимающий площадь 1 кв.м. Один комплект второго типа занимает 3 кв. м. и обойдется в 1 у.е. При этом использование комплекта 1-го типа обеспечивает прибыль 2 у.е. в сутки, а второго – 4 у.е. в сутки. Составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную прибыль компании и найти эту прибыть.

Решение. Пусть $x_1$, $x_2$ – количество приобретенных комплектов первого и второго типов. Получаем следующую задачу оптимизации:

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Запишем задачу в каноническом виде

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,4; x_1, x_2 \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

и составим для нее симплекс-таблицу

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 19/3 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 10 | 1 | 3 | 0 | 1 |
| $z$ | 0 | -2 | -4 | 0 | 0 |

Введем в базис $x_2$ и, соответственно, выведем из базиса переменную $x_4$. Найдем решение задачи без учета условия целочисленности

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 3 | 5/3 | 0 | 1 | -1/3 |
| $x_2$ | 10/3 | 1/3 | 1 | 0 | 1/3 |
| $z$ | 40/3 | -2/3 | 0 | 0 | 4/3 |
| $x_1$ | 9/5 | 1 | 0 | 3/5 | -1/5 |
| $x_2$ | 41/15 | 0 | 1 | -1/5 | 2/5 |
| $z$ | 218/15 | 0 | 0 | 2/5 | 6/5 |

Таким образом, $X = \left(\frac{9}{5}, \frac{41}{15}, 0, 0\right)$ – решение исходной задачи без учета условия целочисленности. Заметим, что $\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{11}{15}$, а поэтому дополнительное ограничение выписывается для базисной переменной $x_1$. Последнее имеет вид

$$\{1\} x_1 + \left\{\frac{3}{5}\right\} x_3 + \left\{-\frac{1}{5}\right\} x_4 \ge \left\{\frac{9}{5}\right\}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \ge \frac{4}{5},$$

или $3x_3 + 4x_4 \ge 4$. Вводим балансовую переменную $x_5$ и получаем

$$3x_3 + 4x_4 - x_5 = 4, \text{ или } -3x_3 - 4x_4 + x_5 = -4.$$

Включим в последнюю симплекс-таблицу дополнительное ограничение

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 9/5 | 1 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 |
| $x_2$ | 41/15 | 0 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 |
| $x_5$ | -4 | 0 | 0 | -3 | -4 | 1 |
| $z$ | 218/15 | 0 | 0 | 2/5 | 6/5 | 0 |

Так как в третьей строке $\min\left\{-\frac{2/5}{-3},-\frac{6/5}{-4}\right\}=\frac{2}{15}$, то выводим из базиса $x_5$ и вводим в базис $x_3$. Поделив третью строку на $-3$ и сделав шаг симплекс-метода, получим

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 3/5 | -1/5 |
| $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 2/15 | 1/15 |
| $x_5$ | 4/3 | 0 | 0 | 1 | -4/3 | -1/3 |
| $z$ | 14 | 0 | 0 | 0 | 26/5 | 2/15 |

базисное решение из заключительной симплекс-таблицы $X=\left(1,3,\frac{4}{3},0,0\right)$, а решением исходной задачи является $X^*=(1,3)$, $z_{\max}=z(X^*)=14$.

Итак, необходимо приобрести 1 комплект первого типа и 3 комплекта второго типа. При этом суточная прибыль составит 14 у.е.

### Задачи для самостоятельного решения.

Задачи 64-66 целочисленного программирования

а) решить графическим методом;

б) решить методом Гомори;

в) дать геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения.

64. $z=x_1+5x_2+3\to\max$ при $x_1,x_2\ge 0,\ x_1,x_2\in Z$ и $\begin{cases}-x_1+x_2\le 2,\\ x_1+x_2\le 7.\end{cases}$

65. $z=3x_1+5x_2+1\to\max$ при $x_1,x_2\ge 0,\ x_1,x_2\in Z$ и $\begin{cases}-x_1+x_2\le 3,\\ x_1+x_2\le 12.\end{cases}$

66. $z = x_1 + x_2 - 6 \to \max$ при $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1, x_2 \in Z$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ -3x_1 + x_2 \leq 0. \end{cases}$

67. Для увеличения прибыли компания приняла решение о приобретении нового оборудования, выделив на это 34 у.е. и предоставив площадь 60 кв. м. При этом оборудование может быть заказано двух типов. Приобретение оборудования первого типа обойдется в 3 у.е. за 1 комплект, занимающий площадь 3 кв.м. Один комплект второго типа занимает 5 кв. м. и обойдется в 4 у.е. При этом использование комплекта 1-го типа обеспечивает прибыль 2 у.е. в сутки, а второго – 3 у.е. в сутки. Составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную прибыль компании.

68. На складе имеются бревна длиной 3 м. Часть из них требуется распилить на заготовки двух видов: длиной 1,2 м и длиной 0,8 м. Заготовок первого типа нужно получить не менее 50 шт, а 2-го типа – не менее 81 шт. Найти наименьшее число бревен, требуемое для получения необходимого числа заготовок каждого типа.

# Глава 5
# Задачи многокритериальной оптимизации

## 5.1. Общая постановка задачи многокритериальной оптимизации. Парето-эффективное множество.

Задача вида

$$\begin{cases} f_i(x) \to \max\ (\min) \\ \mathrm{x} \in \mathrm{D} \end{cases},$$

где i>1, $D \in R^n$ – допустимое множество, а $f_i(x)$ – гладкие функции на $D$, называется *задачей многокритериальной оптимизации*.

В экономических задачах область допустимых решений *D* обычно задается системой уравнений и неравенств, к которой могут быть добавлены некоторые дополнительные ограничения, например, целочисленность переменных.

**Определение 5.1.** *Пусть X и Y – два допустимых решения. Говорят, что X доминирует Y, если для всех i=1,2,…n выполняется неравенство* $f_i(X) \geq f_i(Y)$ *и найдется такое k, что* $f_k(X) > f_k(Y)$.

**Определение 5.2.** *Решение Z называется* ***недоминируемым (эффективным)****, если нет решения X, которое бы доминировало Z.*

**Определение 5.3.** *Множество эффективных (недоминируемых) решений называется* ***множеством Парето****. Геометрическое изображение множества Парето называется* ***Парето-эффективной границей (Парето-оптимальной границей).***

В задаче многокритериальной оптимизации наилучшее решение следует искать в множестве Парето.

*Алгоритм построения Парето-эффективной границы:*

1. Строим допустимое множество *D*, заданное системой ограничений, как пересечение полуплоскостей, соответствующих каждому неравенству, входящему в эту систему.

2. Для каждой функции $f_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{io}$ строим линию уровня как прямую, перпендикулярную соответствующему вектору нормали $\bar{n}_i = (c_{i1}, c_{i2})$. Каждая из этих линий уровня разбивает плоскость

$XOY$ на две полуплоскости. Пусть $П_i$ –полуплоскости, содержащие вектор градиента целевой функции $f_i$, а их пересечение $П = \bigcap_{i=1}^{n} П_i$;

3. Перемещая данную область $П$ по границе допустимого множества $D$, находим те точки границы, которые являются единственными точками пересечения областей $П$ и $D$. Данные точки являются оптимальными по Парето, а множество всех таких точек – Парето-эффективной границей.

**Пример 5.1.** Найти Парето-эффективную границу задачи

$$\begin{cases} f_1 = 4x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

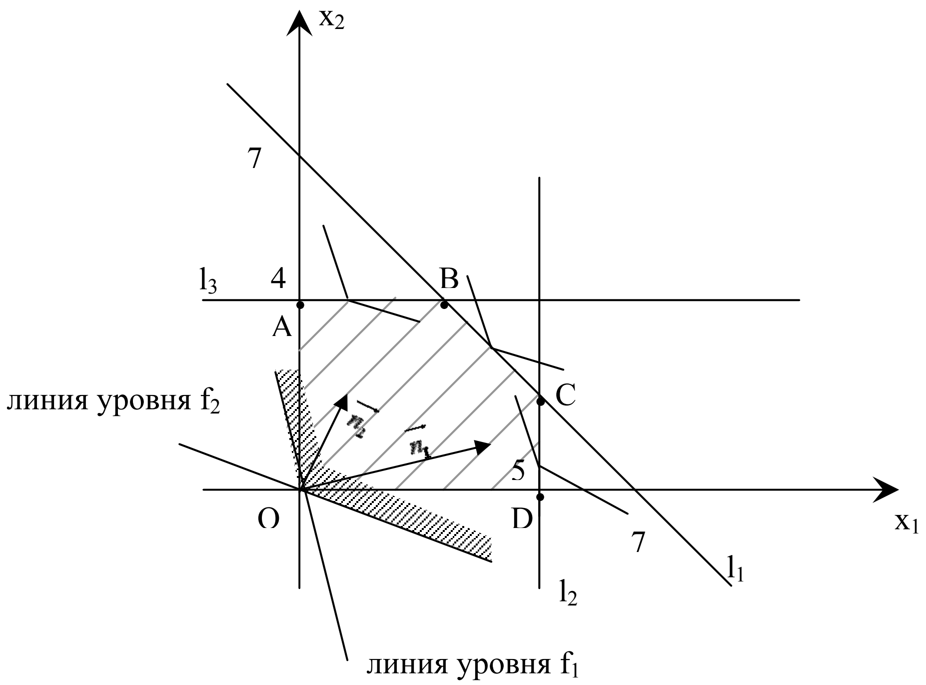
Решение. Область допустимых решений $D$ задается системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Построим данную область.

$$l_1 : x_1 + x_2 = 7$$
$$l_2 : x_1 = 5$$
$$l_3 : x_2 = 4$$

В качестве допустимого множества получаем область $OABCD$ с угловыми точками $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B(3;4)$, $C(5;2)$, $D(5;0)$.




Для функций $f_1$ и $f_2$ построим линии уровня ($f_1$=const, $f_2$=const) как прямые, перпендикулярные соответствующим векторам нормали $\overrightarrow{n_1}$=(4;1) и $\overrightarrow{n_2}$=(1;2). Каждая из этих линий уровня разбивает плоскость *XOY* на 2 полуплоскости. Рассмотрим те из них $П_i$, которые содержат соответствующий вектор нормали (вектор градиента целевой функции). Пусть $П=П_1 \cap П_2$. Перемещая область *П* по границе множества *D* легко определить, что Парето-эффективной границей будет отрезок [*BC*], т.е. множество точек (1-*t*)(3;4)+*t*(5;2)=(3+2*t*; 4-2*t*), $t \in [0;1]$.

**Ответ.** [*BC*] – Парето-эффективная граница, т.е. множество точек (3+2*t*; 4-2*t*), $t \in [0;1]$

**Замечание 5.1.** Задача минимизации одной или нескольких целевых функций в задаче многокритериальной оптимизации легко сводится к задаче максимизации умножением на (-1).

**Пример 5.2.** Для выпуска 2-х видов продукции используется три вида ресурсов. Известны матрица норм расхода сырья $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, цены на ресурсы *Q*=(1; 1; 4), цены реализации продукции *P*=(17; 12), запасы ресурсов $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}$. Найти Парето-оптимальную границу в задаче максимизации прибыли и выручки.

Р е ш е н и е. Если планируется произвести $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ единиц продукции, то стоимость ресурсов равна $QAX=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=14x_1+7x_2$, предполагаемая выручка $PX=17x_1+12x_2$, прибыль $PX - QAX=3x_1+5x_2$.

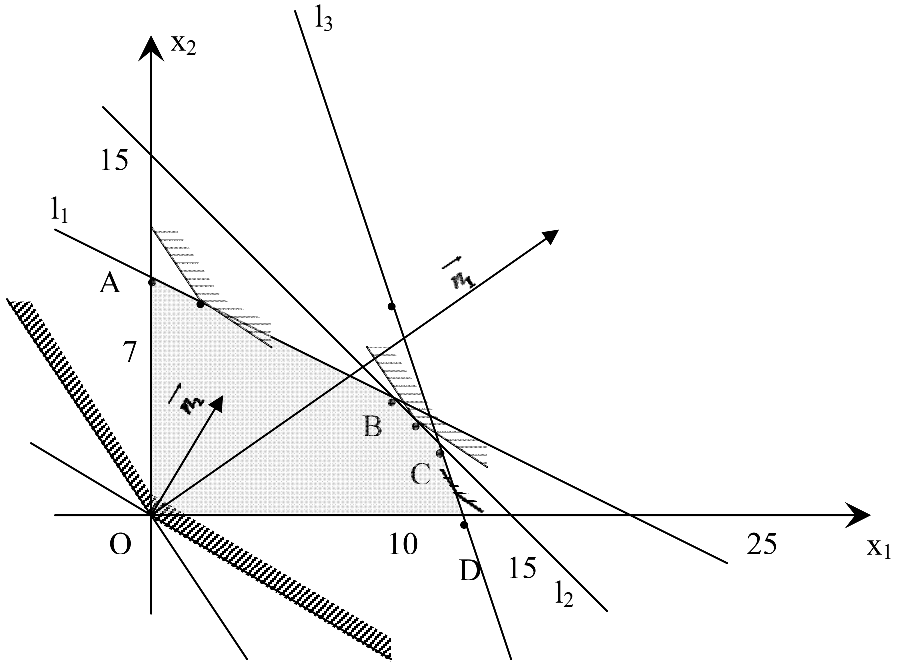
Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} f_1=17x_1+12x_2\to\max\\ f_2=3x_1+5x_2\to\max\\ x_1+2x_2\le 20\\ x_1+x_2\le 15\\ 3x_1+x_2\le 39\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$$

Изобразим множество допустимых решений графически

$$l_1: x_1+2x_2=20$$
$$l_2: x_1+x_2=15$$
$$l_3: 3x_1+x_2=39$$

Получим пятиугольник $OABCD$ с вершинами $O(0;0)$, $A(0;10)$, $B(10;5)$, $C(12;3)$, $D(13;0)$.




Построим для каждой целевой функции $f_1$, $f_2$ вектор нормали $\vec{n_1}=(17;12)$ и $\vec{n_2}=(3;5)$ и перпендикулярные им линии уровня. Найдем область $П=П_1\cap П_2$. Перемещая область $П$ по границе множества $D$ легко определить, что Парето-эффективной границей является отрезок $[BC]$, т.е. множество точек $(1\text{-}t)(10;5)+t(12;3)=(10+2t;\ 5\text{-}2t)$, $t\in[0;1]$.

**Ответ.** $[BC]$ - Парето-эффективная граница, $(10+2t;\ 5\text{-}2t)$, $t\in[0;1]$.

## Задачи для самостоятельного решения

Найти Парето-оптимальную границу следующей задачи:

69. $\begin{cases} f_1 = 3x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$. 70. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 10x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + x_2 \to \max \\ f_3 = x_2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 \le 40 \\ x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$. 71. $\begin{cases} f_1 = 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 - 2x_2 \to \max \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$.

72. $\begin{cases} f_1 = x_1 + 5x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + x_2 \to \min \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$. 73. $\begin{cases} f_1 = 5x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$. 74. $\begin{cases} f_1 = 4x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 5x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$.

75. Рекламное агентство, в штате которого 12 человек, получило заказ на рекламу нового продукта на радио и ТВ. Основные данные об аудитории, стоимости рекламы и количестве занятых ее изготовлением агентов занесены в таблицу (на 1мин.):

| | Радио | ТВ |
|---|---|---|
| Рекламная аудитория (млн. чел.) | 5 | 10 |
| Стоимость минуты (тыс. у.е.) | 4 | 16 |
| Количество занятых агентов | 1 | 2 |

Рекламное агентство решает задачу о максимизации возможной аудитории и минимизации издержек на изготовление рекламы при условии, что контракт запрещает использовать более 4 минут рекламы на радио. Найти Парето-оптимальную границу.

76. Для выпуска двух видов продукции используются два вида ресурсов. Известны $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$- матрица нор расхода сырья, $Q=(1,2)$ – цены на ресурсы, $P=(5,12)$ – цена реализации продукции, $B=\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ - за-

пасы ресурсов. Найти Парето-оптимальную границу в задаче максимизации прибыли и выручки.

## 5.2. Методы решения многокритериальной задачи оптимизации

**Метод обобщенного критерия**. Метод перехода от нескольких критериев $f_1, f_2, \ldots f_m$ к одному, задаваемому новой функцией $z = \sum_{j=1}^{m}(\alpha_j \cdot f_j)$ называется *сверткой* или *методом обобщенного критерия*. Числа $\alpha_j$ называются весовыми коэффициентами. Чем больше $\alpha_j$, тем больший «вклад» вносит $j$-й критерий в обобщенный критерий $z$. Иногда требуют, чтобы $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j = 1$.

**Пример 5.3.** Решить задачу методом обобщенного критерия

$$\begin{cases} f_1 = 4x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Решение. Пусть $\alpha_1 = 0{,}4$, $\alpha_2 = 0{,}6$. Тогда задача двухкритериальной оптимизации сводится к задаче одного критерия $z = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0{,}4(4x_1 + x_2) + 0{,}6(x_1 + 2x_2) = 2{,}2x_1 + 1{,}6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Перепишем целевую функцию $z$ в виде $z - 2{,}2x_1 - 1{,}6x_2 = 0$. Составим начальную симплекс-таблицу

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 0 | -2,2 | -1,6 | 0 | 0 | 0 |

Вводим в базис переменную $x_1$ и, так как $\min\left(\frac{7}{1};\ \frac{5}{1}\right) = 5$, выводим из базиса $x_4$.

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| $x_1$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 11 | 0 | -1,6 | 0 | 2,2 | 0 |

Вводим в базис переменную $x_2$ и, так как $\min\left(\frac{2}{1};\ \frac{4}{1}\right)=2$, выводим из базиса $x_3$.

| Б.П. | С.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| $x_1$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| $z$ | 14,2 | 0 | 0 | 1,6 | 0,6 | 0 |

Последняя строка и столбец свободных членов содержит только положительные числа, следовательно, мы получили оптимальное решение $z^*$=14,2, X$^*$=(5;2). При этом $f_1^* = f_1(5;2) = 22$, $f_2^* = f_2(5;2) = 9$.

**Замечание 5.2.** Выбор весовых коэффициентов $\alpha_j$ имеет субъективный характер.

**Метод приоритетов.** *Метод приоритетов* решения многокритериальных задач применяется в том случае, когда критерии $f_i$ упорядочены по их относительной важности.

На первом шаге решения задачи отбирают множество исходов, которые имеют максимальную оценку по важнейшему критерию. Если исход единственный, то он и является оптимальным. Если же исходов несколько, то среди них выбирают те, которые имеют максимальную оценку по второму по важности критерию. Если опять исходов несколько, то процесс повторяют для следующих критерий.

**Пример 5.4.** Решить двухкритериальную задачу методом приоритетов.

$$\begin{cases} f_1 = 4x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Предположим, что критерий $f_1$ предпочтительнее (приоритетнее) критерия $f_2$ ($f_1 \succ f_2$).

1 шаг. Решим задачу

$$\begin{cases} f_1 = 4x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

симплекс методом.

Приведем систему ограничений к каноническому виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Запишем целевую функцию в виде $f_1 - 4x_1 - x_2 = 0$.

Начальная симплекс-таблица имеет вид:

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $f_1$ | 0 | -4 | -1 | 0 | 0 | 0 |

Вводим в базис переменную $x_1$ и, так как $\min\left(\frac{7}{1};\ \frac{5}{1}\right) = 5$, выводим из базиса $x_4$.

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| $x_1$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $f_1$ | 20 | 0 | -1 | 0 | 4 | 0 |

Вводим в базис переменную $x_2$ и, так как $\min\left(\frac{2}{1};\ \frac{4}{1}\right) = 2$, выводим из базиса $x_3$.

| Б.П. | С.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| $x_1$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| $z$ | 22 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 |

Так как столбец свободных членов и последняя строка содержат только положительные числа, то мы получим оптимальное решение $X^*$=(5;2), $f_{1_{\max}} = f_1(5;2) = 22$. При этом $f_2 = 9$.

2 шаг. Решим задачу для второго по важности критерия

$$\begin{cases} f_2 = x_1 + 2x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ 4x_1 + x_2 \ge 22 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем систему ограничений к каноническому виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - x_6 = 22 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6} \end{cases}$$

и запишем целевую функцию в виде $f_2 - x_1 - 2x_2 = 0$

Составим начальную симплекс таблицу

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_6$ | -22 | -4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $f_2$ | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Так как столбец свободных членов содержит отрицательный элемент, то применим двойственный симплекс-метод.

Выводим из базиса $x_6$ и вводим в базис $x_1$.

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 3/2 | 0 | 3/4 | 1 | 0 | 0 | 1/4 |
| $x_4$ | -1/2 | 0 | -1/4 | 0 | 1 | 0 | 1/4 |
| $x_5$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_1$ | 11/2 | 1 | 1/4 | 0 | 0 | 0 | -1/4 |
| $f_2$ | 11/2 | 0 | -7/4 | 0 | 0 | 0 | -1/4 |

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 0 | -4 | 0 | -1 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 1 | 1 |
| $x_1$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $f_2$ | 9 | 0 | 0 | 0 | -7 | 0 | -2 |

Все элементы столбца свободных членов положительны, поэтому продолжим решение задачи симплекс-методом.

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -3/2 | 0 | 0 | 1 | 0 | -3/4 | 1/4 |
| $x_2$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1/4 | 1/4 |
| $x_1$ | 9/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1/4 | -1/4 |
| $f_2$ | 25/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7/4 | -1/4 |

| Б.П. | с.ч. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | 2 | 0 | 0 | -4/3 | 0 | 1 | -1/3 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 4/3 | 0 | 0 | 1/3 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 0 | 1/3 | 1 | 0 | 1/3 |
| $x_1$ | 5 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 0 | -1/3 |
| $f_2$ | 9 | 0 | 0 | 7/3 | 0 | 0 | 1/3 |

Все элементы столбца свободных членов и последней строки положительны, следовательно, мы получили оптимальное решение $X^*=(5;2)$, $f_2=9$.

**Ответ.** $X^*=(5;2)$, $f^*=(22;9)$.

**Метод идеальной точки.** Метод идеальной точки является «геометрическим» методом для многокритериальных задач. Продемонстрируем его на следующем примере:

**Пример 5.5.** (многокритериальная задача об использовании ресурсов). Для выпуска двух видов продукции используется два вида ресурсов. Известны $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ – матрица норм расхода сырья, $Q=(2,1)$ – стоимость ресурсов, $P=(6,9)$ – цена реализации продукции, $B=\begin{pmatrix}18\\ 16\end{pmatrix}$ – запасы ресурсов. Найти план производства, максимизирующий одновременно выручку и прибыль (или, что эквивалентно, максимизирующий прибыль и минимизирующий затраты на ресурсы).

Решение. Если $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ – план производства, то стоимость ресурсов $QAX=4x_1+8x_2$, выручка $f_1=PX=6x_1+9x_2$, прибыль $f_2=PX-QAX=2x_1+x_2$. Расписав условие $AX\le B$, т.е. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}18\\ 16\end{pmatrix}$,

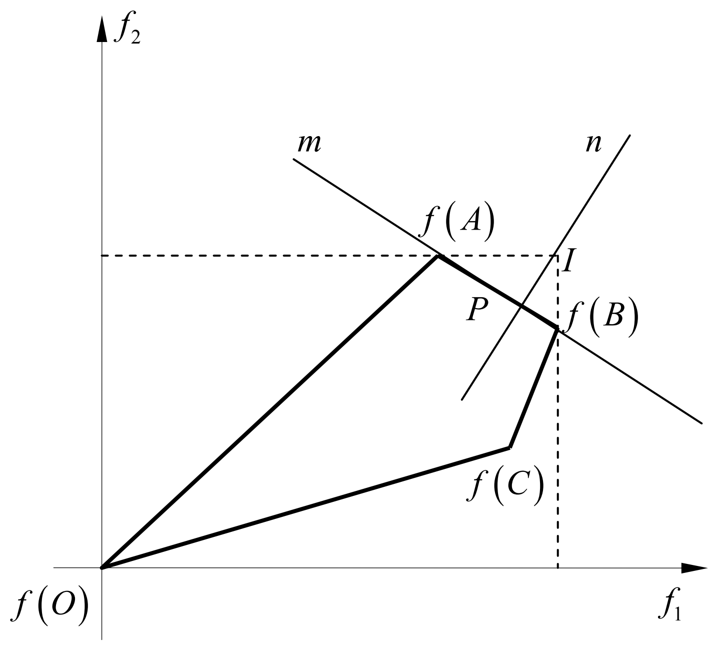
получим задачу: $$\begin{cases} f_1=6x_1+9x_2\to\max,\\ f_2=2x_1+x_2\to\max,\\ x_1+3x_2\le 18,\\ 2x_1+2x_2\le 16,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$$ .

Введем линейное преобразование $f: R^2 \to R^2$, определенное критериями $f_1$ и $f_2$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 9x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

При этом $f(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(A) = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 6 \end{pmatrix}$, $f(B) = \begin{pmatrix} 63 \\ 11 \end{pmatrix}$, $f(C) = \begin{pmatrix} 48 \\ 16 \end{pmatrix}$.

В силу линейности $f$ мы можем легко получить образ области $D$ под действием преобразования $f$ на плоскости $(f_1, f_2)$ – это четырехугольник с вершинами в точках $f(O)$, $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$. При этом идеальной является точка $I$ с координатами $(f_{1,\max}, f_{2,\max})$, не принадлежащая образу $D$ в силу того, что оптимальные значения соответствующих целевых функций достигаются в различных точках.




Естественно предположить, что образом компромиссной точки является точка, принадлежащая $D$ и ближайшая к $I$, т.е. основание перпендикуляра, опущенного из $I$ на отрезок, соединяющий точки $f(A)$ и $f(B)$. Найдя уравнение прямой $m$, проходящей через эти точки, а затем прямой $n$, ей перпендикулярной и проходящей через $I$, получим, что точка $P = m \cap n$ имеет координаты $P\left(\frac{123}{2}; \frac{23}{2}\right)$. Наконец, находим компромиссную точку как прообраз $P$: $x^* = f^{-1}(P) = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 123/2 \\ 23/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$.

## Задачи для самостоятельного решения

№ 77-81. Решить задачу многокритериальной оптимизации:

а) методом идеальной точки;

б) методом обобщенного критерия ($\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$);

в) методом приоритетов.

77. $\begin{cases} f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max \\ f_2 = 2x_1 + x_2 \to \max \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$. 78. $\begin{cases} f_1 = 3x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$. 79. $\begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 3x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$.

80. $\begin{cases} f_1 = 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 - 2x_2 \to \max \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$.

81. Для выпуска двух видов продукции используются два вида ресурсов. Известны $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$- матрица нор расхода сырья, $Q$=(1,2) – цены на ресурсы, $P$=(5,12) – цена реализации продукции, $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ - запасы ресурсов.

82. Рекламное агентство, в штате которого 10 человек, получило заказ на рекламу нового продукта на радио и ТВ. Основные данные об аудитории, стоимости рекламы и количестве занятых ее изготовлением агентов занесены в таблицу (на 1мин.):

| | Радио | ТВ |
|---|---|---|
| Рекламная аудитория (млн. чел.) | 4 | 8 |
| Стоимость минуты (тыс. у.е.) | 8 | 24 |
| Количество занятых агентов | 1 | 2 |

Рекламное агентство решает задачу о максимизации возможной аудитории $(f_1)$ и минимизации издержек на изготовление рекламы $(f_2)$ при условии, что контракт запрещает использовать более 6 минут рекламы на радио. Найти компромиссное решение: а) методом приоритетов ($f_1 \succ f_2$), б) методом обобщенного критерия ($\alpha_1 = 2{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}5$).

# Глава 6
# Элементы теории игр

## 6.1. Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры.

В экономике и других сферах деятельности достаточно часто встречаются ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации называются *конфликтными*.

*Теория игр* - математическая теория конфликтных ситуаций, при этом математическая модель называется *игрой*, а исход конфликта *выигрышем*.

*Стратегией игрока* называется совокупность правил, определяющих поведение игрока на каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

*Оптимальная стратегия игрока* обеспечивает ему при многократном повторении игры максимально возможный выигрыш.

Парная игра, в которой выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, называется *антагонистической* или *игрой с нулевой суммой*.

Пусть игрок $A$ располагает $m$ стратегиями $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$, а игрок $B$ – $n$ стратегиями $B_1$, $B_2$,…,$B_n$. Обозначим через $a_{ij}$ выигрыш игрока $A$ при выборе стратегий $A_i$ и $B_j$.

Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется *платежной матрицей* или *матрицей игры*.

Пусть $\alpha_i$ – наименьший выигрыш игрока $A$ при выборе им стратегии $A_i$ для всех возможных стратегий игрока $B$, $\alpha_i = \min\limits_{j=\overline{1,n}} \alpha_{ij}$. Тогда гарантированный выигрыш игрока $A$ при любой стратегии игрока $B$ равен

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,m}} \alpha_i = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} \alpha_{ij}$$

Число $\alpha$ называется *нижней ценой игры*.

Число $\beta = \min_{j=1,n} \max_{i=1,m} \alpha_{ij}$ называется *верхней ценой игры*. Это гарантированный проигрыш игрока В.

**Замечание 6.1.** $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha = \beta = \nu$, то $\nu$ называется *чистой ценой (ценой игры)*, а пара чистых оптимальных стратегий $A_i$ и $B_j$, для которой $\alpha_{ij} = \nu$, называется *седловой точкой матрицы*.

**Пример 6.1.** Определить нижнюю и верхнюю цену игры, заданной платежной матрицей $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Имеет ли игра седловую точку?

Решение. Для нахождения нижней цены игры найдем минимальные значения каждой строки матрицы и выберем среди них наибольшее.

$$\alpha_1 = \min(0{,}5;\, 0{,}6;\, 0{,}8) = 0{,}5;$$

$$\alpha_2 = \min(0{,}9;\, 0{,}7;\, 0{,}8) = 0{,}7;$$

$$\alpha_3 = \min(0{,}7;\, 0{,}6;\, 0{,}6) = 0{,}6;$$

$$\alpha = \max(0{,}5;\, 0{,}7;\, 0{,}6) = 0{,}7.$$

Для нахождения верхней цены игры найдем максимальное значение в каждом столбце и выберем среди них наименьшее.

$$\beta_1 = \max(0{,}5;\, 0{,}9;\, 0{,}7) = 0{,}9;$$

$$\beta_2 = \max(0{,}6;\, 0{,}7;\, 0{,}6) = 0{,}7;$$

$$\beta_3 = \max(0{,}8;\, 0{,}8;\, 0{,}6) = 0{,}8;$$

$$\beta = \min(0{,}9;\, 0{,}7;\, 0{,}8) = 0{,}7.$$

Так как $\alpha = \beta = 0{,}7$, то цена игры $\nu = 0{,}7$, и она достигается на одной и той же паре стратегий $(A_2;\, B_2)$.

**Ответ.** $\alpha = \beta = 0{,}7$; Седловая точка – $(A_2;\, B_2)$.

## Задачи для самостоятельного решения.

№ 83-89. Для платежной матрицы $P$ определить нижнюю, верхнюю цену игры и оптимальные решения игры, если существует седловая точка.

83. $P = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 25 & 0 \\ 13 & 14 & 19 & 6 \\ -5 & 3 & -2 & -4 \\ 18 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. 84. $P = \begin{pmatrix} 14 & 27 & 18 & 19 & 23 \\ 2 & 17 & 16 & 24 & 2 \\ 29 & 3 & 7 & 15 & 22 \\ 5 & 20 & 17 & 23 & 10 \end{pmatrix}$.

85. $P=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. 86. $P=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 87. $P=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

88. $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 89. $P=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

## 6.2. Решение игры в смешанных стратегиях.

Если $\alpha<\beta$, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. Его можно получить случайным образом чередуя чистые стратегии, т.е. в смешанных стратегиях.

**Определение 6.1.** Смешанной стратегией $S_A$ игрока $A$ называется применение чистых стратегий $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

$$S_A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}.$$

Аналогично для игрока $B$:

$$S_B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}, \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

**Теорема Неймана.** Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.

**Пример 6.2.** Найти решение игры в смешанных стратегиях, заданной платежной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Для данной игры $\alpha=3$, $\beta=4$, $\alpha\neq\beta$. Средний выигрыш игрока $A$, если он использует оптимальную смешанную стратегию $S_A^*=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$, а игрок $B$ – чистую стратегию $B_1$ (первый столбец платежной матрицы), равен цене игры $\nu$:

$$4p_1^* + 3p_2^* = \nu$$

Тот же средний выигрыш получает игрок $A$, если второй игрок применяет стратегию $B_2$ (второй столбец платежной матрицы), т.е.

$$2p_1^* + 5p_2^* = \nu$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 4p_1^* + 3p_2^* = \nu \\ 2p_1^* + 5p_2^* = \nu \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases},$$

решением которой является $p_1^* = p_2^* = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{7}{2}$.

Аналогично, система для игрока *B* имеет вид

$$\begin{cases} 4q_1^* + 2q_2^* = \nu \\ 3q_1^* + 5q_2^* = \nu \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases},$$

решением которой является $q_1^* = \frac{3}{4}$, $q_2^* = \frac{1}{4}$, $\nu = \frac{7}{2}$.

Оптимальная стратегия игрока *A* состоит в том, чтобы чередовать свои стратегии, выбирая их с вероятностью $\frac{1}{2}$, при этом средний выигрыш равен $\frac{7}{2}$.

**Ответ.** $p_{опт} = (\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $q_{опт} = (\frac{3}{4};\frac{1}{4})$, $\nu = \frac{7}{2}$

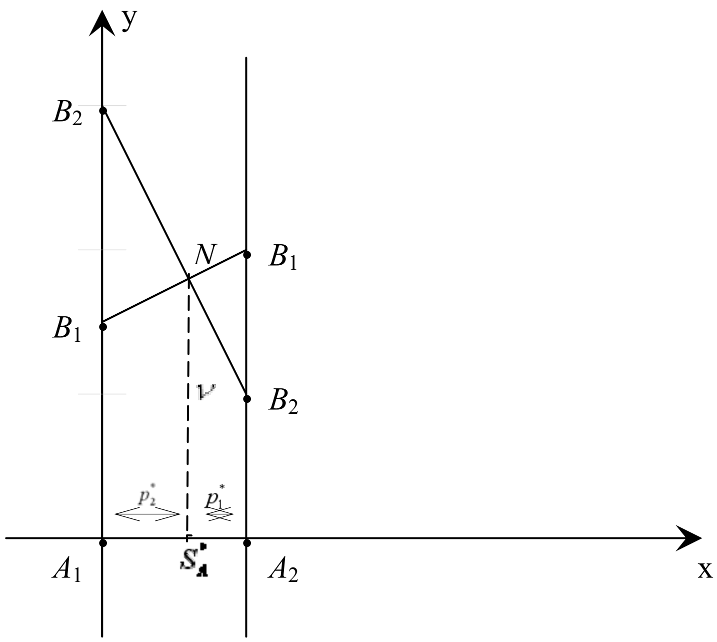
Игру в смешанных стратегиях, заданную платежной матрицей размерностью $2\times 2$, можно решить геометрическим способом.

**Пример 6.3.** Найти решение игры, заданной платежной матрицей $P = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, геометрическим способом.

Решение. $\alpha = 1{,}5$, $\beta = 2$. Так как $\alpha \neq \beta$, то седловой точки нет, следовательно, игра может быть решена в смешанных стратегиях.

На оси Ox отложим единичный отрезок $A_1A_2$. Прямая x=0 соответствует стратегии $A_1$ игрока *A*, а прямая x=1 соответствует стратегии $A_2$.

Пусть второй игрок *B* примет стратегию $B_1$. Отложим на прямых x=0 и x=1 соответствующие выигрыши $a_{11}$ и $a_{21}$. Обозначим эти точки $B_1$. Если второй игрок *B* выберет стратегию $B_2$, то соответствующие выигрыши $a_{12}$ и $a_{22}$. Отложим их так же на прямых x=0 и x=1. Обозначим эти точки $B_2$.




Ординаты точек, лежащий на ломаной $B_1NB_2$ показывают минимальный выигрыш игрока $A$ при использовании им любой смешанной стратегии. В точке $N$ минимальный выигрыш достигает своего максимума, следовательно, это и есть оптимальная стратегия $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$. Ордината точки $N$ равна цене игры $\nu$.

Точка $N$ есть пересечение прямых $B_1B_1$ и $B_2B_2$.

Уравнение $B_1B_1$: $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1,5}{2-1,5}$

$y = 0,5x + 1,5$

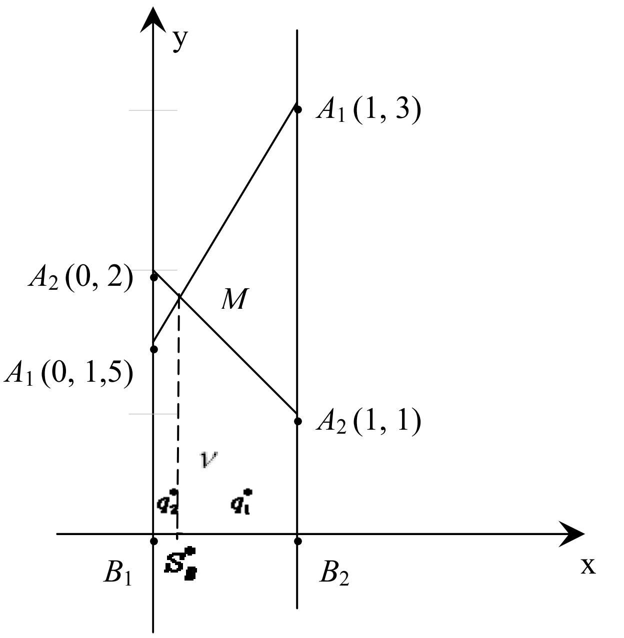
Уравнение $B_2B_2$: $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-3}{1-3}$

$y = -2x + 3$

$$\begin{cases} y = 0,5x + 1,5 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

Решением этой системы является точка (0,6;1,8). Следовательно $p_2^* = 0,6$, $p_1^* = 1 - p_2^* = 0,4$, $\nu = 1,8$.

Геометрически можно определить оптимальную стратегию игрока $B$, если поменять игроков $A$ и $B$ местами и вместо максимума нижней границы рассмотреть минимум верхней границы.




Уравнение $A_1A_1$: $\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{y-1{,}5}{3-1{,}5}$

$y=1{,}5x+1{,}5$

Уравнение $A_2A_2$: $\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{y-2}{1-2}$

$y=-x+2$

Координаты точки $M$ есть решение системы

$$\begin{cases} y=1{,}5x+1{,}5 \\ y=-x+2 \end{cases}$$

$$x=0{,}2 \quad y=1{,}8$$

Следовательно, $q_2^*=0{,}2$ , $q_1^*=1-q_2^*=0{,}8$, $\nu=1{,}8$.

**Ответ.** $p_{опт}=(0{,}4;0{,}6)$, $q_{опт}=(0{,}8;0{,}2)$, $\nu=1{,}8$

**Замечание 6.2.** Если в платежной матрице $P$ все элементы $i$-й строки не меньше соответствующих элементов $k$-й строки, $a_{ij}\ge a_{kj}$, $j=\overline{1,n}$, а по крайней мере один строго больше, то $i$-я строка называется *доминирующей*, а $k$-я строка – доминируемой.

Игроку $A$ не выгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки, а игроку $B$ – доминирующие столбцы. Поэтому, при решении игры, можно уменьшить размер платежной матрицы путем удаления из нее доминируемых строк и доминирующих столбцов.

**Пример 6.4.** Найти решение игры $P=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Решение. Нижняя цена игры $\alpha=2$. Верхняя цена игры $\beta=3$. Так как $\alpha\ne\beta$, то решение игры будем искать в смешанных стратегиях. Третья строка является доминируемой относительно второй строки и, следовательно, не выгодна для первого игрока $A$.

Для второго игрока $B$ не выгодны первый и второй столбец. После удаления данных столбцов и строки получаем матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Для игрока $A$: $\begin{cases} 3p_1^* + 2p_2^* = \nu \\ -2p_1^* + 6p_2^* = \nu \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$,

$$p_1^* = \frac{4}{9},\ p_2^* = \frac{5}{9},\ \nu = \frac{22}{9}.$$

Для игрока $B$: $\begin{cases} 3q_1^* - 2q_2^* = \nu \\ 2q_1^* + 6q_2^* = \nu \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$,

$$q_1^* = \frac{8}{9},\ q_2^* = \frac{1}{9},\ \nu = \frac{22}{9}.$$

**Ответ.** $p_{опт} = (\frac{4}{9};\frac{5}{9};0)$, $q_{опт} = (0;0;\frac{8}{9};\frac{1}{9})$, $\nu = \frac{22}{9}$.

**Задачи для самостоятельного решения.**

№90-91. Найти решение игры в смешанных стратегиях аналитическим и графическим способом.

90. $P = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

91. $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1 \\ 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

№92-97. Найти решение игры, предварительно упростив ее.

92. $P = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. 93. $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 94. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

95. $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. 96. $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 97. $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

## 6.3. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

Пусть игра задана платежной матрицей $P_{m\times n}$. Первый игрок $A$ обладает стратегиями $A_i$, $i = \overline{1,m}$; игрок $B$ – стратегиями $B_j$, $j = \overline{1,n}$.

Оптимальная стратегия $S_A^*$ обеспечивает игроку $A$ при любой стратегии игрока $B$ средний выигрыш, не меньший, чем цена игры $\nu$, и при оптимальной стратегии игрока $B$ выигрыш равный цене игры $\nu$.

Пусть $\nu > 0$ (этого можно добиться, если все элементы платежной матрицы неотрицательны). Для оптимальной старении $S_A^*$ все средние выигрыши не меньше цены игры $\nu$.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge \nu \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge \nu \\ \vdots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge \nu \end{cases}.$$

Пусть $\frac{p_j}{\nu} = x_j$, тогда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1 \end{cases}.$$

Цель игрока $A$ – максимизировать свой гарантированный выигрыш. Рассмотрим $\sum_{j=1}^{m} x_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{m} p_j = \frac{1}{\nu}$.

Так как $\nu \to \max$, то $\sum_{j=1}^{m} x_j \to \min$. Таким образом, получим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_m \ge 0 \end{cases},$$

решением которой будет оптимальная стратегия $S_A^*$ игрока $A$.

Для определения оптимальной стратегии $S_B^*$ игрока $B$ следует учесть, что игрок $B$ стремиться минимизировать гарантированный выигрыш игрока $A$. В этом случае ЗЛП имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max \\ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_n \ge 0 \end{cases}, \text{ где } y_j = \frac{q_j}{\nu}.$$

Решением данной ЗЛП будет оптимальная стратегия $S_B^*$ игрока $B$.

Полученные задачи являются взаимодвойственными.

**Пример 6.5.** Найти решение игры с помощью линейного программирования:

$$P=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Решение. Найдем решение игры для второго игрока $B$. Задача линейного программирования в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases}\varphi = y_1 + y_2 + y_3 \to \max\\ 4y_1 + 2y_2 \le 1\\ 5y_2 \le 1\\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 1\\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0\end{cases}, \text{ где } y_j = \frac{q_j}{\nu}.$$

Приведем данную систему к каноническому виду:

$$\begin{cases}\varphi = y_1 + y_2 + y_3 \to \max\\ 4y_1 + 2y_2 + y_4 = 1\\ 5y_2 + y_5 = 1\\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_6 = 1\\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}\end{cases}$$

Решая ЗЛП симплекс-методом, имеем

| Б.П. | с.ч. | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | 1 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $y_5$ | 1 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_6$ | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| $\varphi$ | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |

| Б.П. | с.ч. | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1/4 | 1 | 1/2 | 0 | 1/4 | 0 | 0 |
| $y_5$ | 1 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_6$ | 1/2 | 0 | 0 | 3 | -1/2 | 0 | 1 |
| $\varphi$ | 1/4 | 0 | -1/2 | -1 | 1/4 | 0 | 0 |

| Б.П. | с.ч. | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1/4 | 1 | 1/2 | 0 | 1/4 | 0 | 0 |
| $y_5$ | 1 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_3$ | 1/6 | 0 | 0 | 1 | -1/6 | 0 | 1/3 |
| $\varphi$ | 5/12 | 0 | -1/2 | 0 | 1/12 | 0 | 1/3 |

| Б.П. | с.ч. | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 3/20 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | -1/10 | 0 |
| $y_2$ | 1/5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/5 | 0 |
| $y_3$ | 1/6 | 0 | 0 | 1 | -1/6 | 0 | 1/3 |
| $\varphi$ | 31/60 | 0 | 0 | 0 | 1/12 | 1/10 | 1/3 |

$$y^* = \left(\frac{3}{20}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right), \quad \varphi_{\max} = \frac{31}{60}$$

Так как $y_1 + y_2 + y_3 = \frac{q_1}{v} + \frac{q_2}{v} + \frac{q_3}{v} = \frac{1}{v}(q_1 + q_2 + q_3) = \frac{1}{v}$, то $v = \frac{60}{31}$ и

$$q_1^* = y_1^* \cdot v = \frac{3}{20} \cdot \frac{60}{31} = \frac{9}{31};$$

$$q_2^* = y_2^* \cdot v = \frac{1}{5} \cdot \frac{60}{31} = \frac{12}{31};$$

$$q_3^* = y_3^* \cdot v = \frac{1}{6} \cdot \frac{60}{31} = \frac{10}{31}.$$

Используя теоремы двойственности, имеем

$$p_1^* = x_1^* \cdot v = \frac{1}{12} \cdot \frac{60}{31} = \frac{5}{31};$$

$$p_2^* = x_2^* \cdot v = \frac{1}{10} \cdot \frac{60}{31} = \frac{6}{31};$$

$$p_3^* = x_3^* \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{60}{31} = \frac{20}{31}.$$

**Ответ.** $p_{опт} = \left(\frac{5}{31}; \frac{6}{31}; \frac{20}{31}\right)$, $q_{опт} = \left(\frac{9}{31}; \frac{12}{31}; \frac{10}{31}\right)$, $v = \frac{60}{31}$.

### Задачи для самостоятельного решения.

№98-100. Найти решение игры путем сведения ее к задаче линейного программирования.

98. $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. 99. $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 100. $P = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

## 6.4. Игра с природой.

Матричная игра, где игрок взаимодействует с окружающей средой, которая не заинтересована в его проигрыше, и решает задачу определения оптимальной стратегии с учетом неопределенности состояния окружающей среды, называется *игрой с природой*.

Пусть $A_1A_2,\ldots,A_m$ – возможные чистые стратегии игрока $A$; $П_1$, $П_2,\ldots, П_n$ – возможные состояния природы; $a_{ij}$ – выигрыш игрока при применении им своей $i$-й чистой стратегии при $j$-ом состоянии природы. Тогда платежная матрица имеет вид

$$P=\begin{array}{c c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \cdots & \Pi_{\text{n}} \end{matrix} & \end{array}.$$

Возможен и другой способ задания матрицы игры с природой – в виде матрицы упущенных возможностей или *матрицы рисков*. Риском $r_{ij}$ игрока $A$ при использовании им стратегии $A_i$ и состоянии природы $\Pi_j$ называется разность между выигрышем, который получил бы игрок, если бы знал, что состоянием природы будет $\Pi_j$, и выигрышем, который получит игрок, не зная этого, т.е.

$$r_{ij}=\max_{1\le i\le m} a_{ij}-a_{ij}$$

**Замечание 6.3.** Игра с природой может быть задана матрицей $P=\{a_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, где $a_{ij}$ – потери игрока $A$ при применении им своей $i$-й чистой стратегии при $j$-ом состоянии природы. В этом случае элементы матрицы рисков вычисляются по формуле

$$r_{ij}=a_{ij}-\min_{1\le i\le m} a_{ij}$$

Для определения оптимальной стратегии игрока $A$ в игре с природой используется ряд критериев, среди которых критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица.

**Критерий Вальда** (принципа наибольшей осторожности) основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий $A_j$.

Если в матрице $P$ результат $a_{ij}$ представляет потери игрока $A$, то при выборе его оптимальной стратегии используется минимаксный критерий

$$Z=\min_{1\le i\le m}\max_{1\le j\le n} a_{ij}$$

Если в матрице $P$ результат $a_{ij}$ представляет выигрыш (полезность) игрока, то при выборе его оптимальной стратегии используется максиминный критерий

$$Z=\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij}$$

**Критерий Сэвиджа** использует матрицу рисков $R=\{r_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Оптимальной считается та стратегия, для которой минимизируется максимальный риск, т.е. достигается значение $S$:

$$S=\min_{1\le i\le m}\max_{1\le j\le n} r_{ij}$$

**Критерий Гурвица**. При любом выборе стратегии наихудший для игрока $A$ вариант реализуется с вероятностью $\alpha$, а наилучший с вероятностью $1-\alpha$, где $\alpha$ - показатель пессимизма ($0\le\alpha\le 1$). Если $a_{ij}$ – выигрыш (полезность) игрока, то оптимальной стратегией считается та, для которой достигается значение $G$:

$$G = \max_{1 \le i \le m}(\alpha \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha) \max_{1 \le j \le n} a_{ij})$$

Если $a_{ij}$ – потери игрока (затраты), то

$$G = \min_{1 \le i \le m}(\alpha \max_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha) \min_{1 \le j \le n} a_{ij})$$

**Критерий Лапласа.** Все состояния природы $П_j$, $j = \overline{1,n}$, считаются равновероятными $q_j = \frac{1}{n}$. Оптимальной по этому критерию стратегией является та, для которой достигается значение $L$:

$$L = \max_{1 \le i \le m}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij})$$

**Пример 6.6.** Используя критерий Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Лапласа определить оптимальную стратегию игрока $A$ в игре с природой, заданной платежной матрицей (матрицей выигрышей) $P$:

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 3 \\ -10 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Используем критерий Вальда. Для этого необходимо в каждой строке матрицы найти наименьший элемент, а затем выбрать ту строку $j$, которой будет соответствовать наибольший из найденных элементов:

$$Z_1 = \min(10, 5, 2) = 2;$$

$$Z_2 = \min(0, 10, 3) = 0;$$

$$Z_3 = \min(-10, 0, 20) = -10;$$

$$Z = \max(2, 0, -10) = 2.$$

Данному значению $Z$ соответствует первая строка. Таким образом, по критерию Вальда оптимальной является первая стратегия $A_1$.

2) Используем критерий Сэвиджа. Для этого для данной матрицы $P$ построим матрицу рисков $R$. Максимальные элементы в каждом столбце соответственно равны 10, 10, 20. Тогда матрица рисков выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} 10-10 & 10-5 & 20-2 \\ 10-0 & 10-10 & 20-3 \\ 10-(-10) & 10-0 & 20-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 18 \\ 10 & 0 & 17 \\ 20 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем для каждой строки матрицы $R$ наибольший элемент, а затем среди них выберем минимальный:

$$S_1 = \max(0, 5, 18) = 18;$$

$$S_2 = \max(10, 0, 17) = 17;$$

$$S_3 = \max(20, 10, 0) = 20;$$

$$S = \min(18, 17, 20) = 17.$$

Данному значению $S$ соответствует вторая строка. Следовательно, по критерию Сэвиджа оптимальной является строка стратегия $A_2$.

3) Используем критерий Гурвица. Пусть $\alpha = 0{,}3$, тогда

$$G_1 = 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}7 \cdot 10 = 7{,}6;$$
$$G_2 = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot 10 = 7{,}0;$$
$$G_3 = 0{,}3 \cdot (-10) + 0{,}7 \cdot 20 = 11{,}0;$$
$$G = \max(7{,}6; 7{,}0; 11{,}0) = 11{,}0.$$

Данному значению $G$ соответствует третья строка. Следовательно, по критерию Гурвица третья стратегия является оптимальной.

4) Используем критерий Лапласа. Так как $n$=3, то

$$L_1 = \frac{1}{3}(10+5+2) = \frac{17}{3};$$
$$L_2 = \frac{1}{3}(0+10+3) = \frac{13}{3};$$
$$L_3 = \frac{1}{3}(-10+0+20) = \frac{10}{3};$$
$$L = \max(\frac{17}{3}; \frac{13}{3}; \frac{10}{3}) = \frac{17}{3}.$$

Данному значению $L$ соответствует первая строка. Следовательно, по критерию Лапласа первая стратегия является оптимальной.

**Ответ.** Критерий Вальда рекомендует стратегию $A_1$;
Критерий Сэвиджа рекомендует стратегию $A_2$;
Критерий Гурвица рекомендует стратегию $A_3$;
Критерий Лапласа рекомендует стратегию $A_1$.

## Задачи для самостоятельного решения.

№101-104. Найти оптимальную стратегию игрока, используя критерии оптимальности Вальда, Гурвица, Сэвиджа, Лапласа (коэффициент пессимизма равен 0,5).

101. $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$

102. $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

103. $P = \begin{pmatrix} 8 & 15 & 12 & 11 \\ 10 & 12 & 14 & 15 \\ 6 & 8 & 13 & 14 \\ 5 & 10 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$

104. $P = \begin{pmatrix} 18 & 25 & 21 & 21 \\ 30 & 22 & 24 & 25 \\ 16 & 28 & 23 & 24 \\ 25 & 30 & 25 & 22 \\ 28 & 27 & 20 & 19 \end{pmatrix}.$

# Глава 7
# Выпуклые функции и теорема Куна-Таккера

В этой главе изучаются экстремумы выпуклых функций на выпуклых множествах в пространстве $R^n$. Причем если выпуклое множество задано системой ограничений типа равенств, то решение задачи сводится к поиску критических точек функции Лагранжа. Если же выпуклое множество определено системой неравенств, то оптимальное значение целевой функции находится с помощью решения системы Куна-Таккера, которая и является основной темой данной главы.

## 7.1. Выпуклые функции

Напомним, что множество $M \subset R^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $A \in M$ и $B \in M$ отрезок $AB$ целиком принадлежит $M$, т.е. для любых точек $A, B \in M, t \in [0,1]$ точка $(1-t)A + tB \in M$. Если же найдется пара точек множества $M$, для которых это условие не выполняется, то множество выпуклым не является.

Пусть теперь точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит выпуклому множеству $M \subset R^n$, а функция $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на $M$.

**Определение 7.1.** *Функция $f$ называется **выпуклой** на множестве $M \subset R^n$, если для любых точек $A, B \in M, t \in [0,1]$ имеет место неравенство $f((1-t)A + tB) \le (1-t) f(A) + tf(B)$.*

*Если для любых точек $A, B \in M, t \in (0,1)$ имеет место строгое неравенство $f((1-t)A + tB) < (1-t) f(A) + tf(B)$, то функция $f$ называется **строго выпуклой** на множестве $M \subset R^n$.*

Если же для любых $A, B \in M, t \in [0,1]$ имеет место обратное неравенство

$$f((1-t)A + tB) \ge (1-t) f(A) + tf(B),$$

то функция $f(X)$ называется *вогнутой* (а в случае строгого неравенства – *строго вогнутой*).

Предположим теперь, что функция $y = f(X)$ имеет непрерывные частные производные 2-ого порядка на выпуклом множестве $M \subset R^n$.

**Определение 7.2.** *Матрицей Гессе функции* $y = f(X)$ *называется матрица*

$$H(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \left( \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \right),$$

*составленная из вторых частных производных функции* $y = f(X)$. *Определитель матрицы Гессе называется гессианом.*

**Замечание 7.1.** *Отметим, что в силу условия непрерывности частных производных 2-ого порядка матрица* $H$ *является симметричной. Поэтому элементы матрицы Гессе, зависящие от точки* $X \in M$, *можно рассматривать как коэффициенты квадратичной формы − второго дифференциала* $d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(X) dx_i dx_j$ *функции* $y = f(X)$.

**Теорема 7.1** (достаточное условие выпуклости). *Пусть* $M \subset R^n$ *– выпуклое открытое множество,* $y = f(X)$ *– функция, имеющая в* $M$ *непрерывные частные производные 2-го порядка. Тогда*

1. *Функция* $y = f(X)$ *является строго выпуклой (строго вогнутой) на* $M$, *если квадратичная форма* $d^2 f(X)$ *положительно (отрицательно) определена.*
2. *Функция* $y = f(X)$ *является выпуклой (вогнутой) на* $M$, *если квадратичная форма* $d^2 f(X)$ *неотрицательно (неположительно) определена.*

Обозначим

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}.$$

Тогда в силу критерия Сильвестра достаточное условие выпуклости для строго выпуклых (вогнутых) функций можно переформулировать следующим образом.

**Теорема 7.2.** *При выполнении условий теоремы 7.1 функция* $y = f(X)$ *является* ***строго выпуклой*** *в* $M$, *если в каждой точке области*

$$\Delta_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots n.$$

*Функция* $y = f(X)$ *является* ***строго вогнутой*** *в* $M$, *если в каждой точке области*

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^n \Delta_n > 0,$$

*т.е.*

$$(-1)^i \Delta_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots n.$$

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ следствие можно сформулировать в следующей форме.

**Следствие 7.1.** *Пусть* $M$ *– выпуклое открытое множество на плоскости* $(x, y)$ *и* $z = f(x, y)$ *имеет в* $M$ *непрерывные частные производные 2-го порядка. Тогда функция* $z = f(x, y)$ *является строго выпуклой (вогнутой) на множестве* $M$, *если в каждой точке* $(x, y) \in M$ *выполняются условия*

1. $f''_{xx}(x, y) > 0$ $\left(f''_{xx}(x, y) < 0\right)$.

2.

$$\Delta_f(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - \left(f''_{xy}(x, y)\right)^2 > 0.$$

**Пример 7.1.** Рассмотрим функцию

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 4xz + 4y^2 - 8yz + 9z^2 + 4x + 8y - 20z.$$

Эта функция дважды дифференцируема и ее частные производные $f'_x = 4x - 4z + 4 = 0$, $f'_y = 8y - 8z + 8$, $f'_z = -4x - 8y + 18z - 20$, $f''_{xx} = 4$,

$f''_{xy}=0$, $f''_{xz}=-4$, $f''_{yy}=8$, $f''_{yz}=-8$, $f''_{zz}=18$. Матрица Гессе равна $H=\begin{pmatrix}4 & 0 & -4\\ 0 & 8 & -8\\ -4 & -8 & 18\end{pmatrix}$ и $\Delta_1=4>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{vmatrix}=32>0$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}4 & 0 & -4\\ 0 & 8 & -8\\ -4 & -8 & 18\end{vmatrix}=192>0$. Поэтому функция является строго выпуклой.

**Пример 7.2.** Рассмотрим теперь производственную функцию Кобба-Дугласа $Q(K,L)=aK^{\beta}L^{1-\beta}$ (здесь $a>0$, $0<\beta<1$). Последовательно находим

$$Q'_K=a\beta K^{\beta-1}L^{1-\beta},\ Q'_L=a(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta},\ Q''_{KK}=-a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{1-\beta},$$

$$Q''_{KL}=a\beta(1-\beta)K^{\beta-1}L^{-\beta},\ Q''_{LL}=-a\beta(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta-1}.$$

Заметим, что

$$H(Q)=\begin{pmatrix}Q''_{KK} & Q''_{KL}\\ Q''_{KL} & Q''_{LL}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{1-\beta} & -a\beta(1-\beta)K^{\beta-1}L^{-\beta}\\ -a\beta(1-\beta)K^{\beta-1}L^{-\beta} & -a\beta(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta-1}\end{pmatrix}$$

и $\Delta_1=-a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{1-\beta}<0$, $\Delta_2=0$. Поэтому достаточное условие не дает ответа на вопрос о выпуклости исходной функции. С другой стороны, второй дифференциал $d^2Q=Q''_{KK}d^2K+2Q''_{KL}dKdL+Q''_{LL}d^2L$ легко преобразуется к виду

$$d^2Q=-a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{-\beta-1}\left(L^2d^2K-2KLdKdL+K^2d^2L\right)=$$

$$=-a\beta(1-\beta)K^{\beta-2}L^{-\beta-1}\left(LdK-KdL\right)^2,$$

т.е. является неположительно определенной квадратичной формой. Таким образом, функция Кобба-Дугласа является вогнутой функцией.

Пусть функция $y=f(X)$ определена на некотором множестве $M\subset R^n$. Тогда точка $X_0$ называется *точкой локального условного максимума (минимума) функции* $y=f(X)$, если $f(X)\le f(X_0)$ (или $f(X)\ge f(X_0)$) для всех точек $X\in M$, достаточно близких к $X_0$.

Далее, точка $X_0$ называется *точкой глобального максимума (минимума) функции* $y = f(X)$ на множестве $M \subset R^n$, если $f(X) \le f(X_0)$ ($f(X) \ge f(X_0)$) для всех точек $X \in M$.

Точки локального условного и глобального максимума (минимума) функции $y = f(X)$ мы будем называть точками локального и, соответственно, глобального экстремума функции $y = f(X)$ на множестве $M \subset R^n$.

Ясно, что точка глобального экстремума $f(X)$ на множестве $M$ является одновременно и точкой локального экстремума на $M$. Обратное, вообще говоря, не верно. Тем не менее, для выпуклых (вогнутых) функций на выпуклых множествах верна следующая теорема.

**Теорема 7.3** (о глобальном характере экстремума выпуклой функции). *Если $X_0$ – точка локального минимума (максимума) выпуклой (вогнутой) функции $y = f(X)$ на выпуклом множестве $M \subset R^n$, то $X_0$ – точка глобального экстремума функции $f(X)$ на $M$, т.е. $f(X_0)$ – наименьшее (наибольшее) значение $f(X)$ на $M$.*

## 7.2. Теорема Куна-Таккера.

Общая задача о нахождении экстремумов функции $y = f(X)$ на множестве $M \in R^n$ называется *задачей математического программирования*. Как и в теории линейного программирования, функция $y = f(X)$ называется *целевой функцией*, а множество $M \in R^n$ − *допустимым множеством*. Далее мы подробнее остановимся на случае, когда целевая функция выпукла (вогнута), а допустимое множество является выпуклым и задано системой ограничений

$$\begin{cases} g_1(X) * b_1, \\ g_2(X) * b_2, \\ \ldots, \\ g_m(X) * b_m, \end{cases}$$

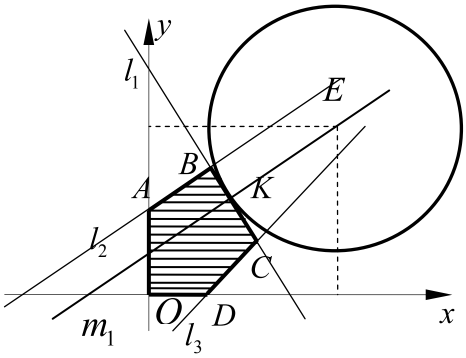
где «*» обозначает «$\ge$», «$\le$» или «=». Соответствующая задача

$$\begin{cases} z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max \ (\min) \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) * b_i, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

называется *задачей выпуклого программирования*.

Общие точные методы решения таких задач отсутствует, и часто для их решения приходится пользоваться приближенными методами решения.

Основное отличие задач выпуклого программирования от линейных задач оптимизации заключается в том, что оптимальное решение может достигаться не только в угловых точках границы, но и в ее внутренних точках.




**Пример 7.3.** Рассмотрим задачу поиска минимального и максимального значения функции $f=(x-16)^2+(y-12)^2$ в области, заданной условиями $\begin{cases} 2x+y\le 19, \\ -5y+3x\ge -30, \\ 5x-4y\le 15, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases}$

Допустимым множеством является пятиугольник $OABCD$ с угловыми точками $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(5,9)$, $C(7,5)$ и $D(3,0)$. Ясно, что $f'_x=2(x-16)$, $f'_y=2(y-12)$. Поэтому стационарная точка $E(16,12)$ функции $f$ лежит, очевидно, вне многоугольника $OABCD$. Далее, линиями уровня целевой функции являются концентрические окружности $(x-16)^2+(y-12)^2=C$ с центром в точке $(16,12)$. Поэтому *минимальное значение функции* $f$ достигается в точке касания с отрезком $BC$ окружности соответствующего радиуса, а *максимальное значение* – в точке $O(0,0)$.

Найдем точку касания $K$ как точку пересечения прямой $l_1$ и прямой $m_1$, перпендикулярной $l_1$ и проходящей через точку $E(16,12)$. Так как прямая $l_1$ определяется уравнением $2x+y=19$, то вектор нормали к ней, равный $\vec{n}=(2,1)$, является направляющим вектором для прямой $m_1$. Таким образом, каноническое и общее уравнения $m_1$ имеют вид $\frac{x-16}{2}=\frac{y-12}{1}$ и $x-2y=-8$ соответственно. Точка пересечения $K=l_1\cap m_1$ находится как решение системы $\begin{cases} 2x+y=19, \\ x-2y=-8. \end{cases}$ $\Rightarrow$ $K(6,7)$. Таким образом, решением задачи на минимум является точка $X_0=(6,7)$ и $f_{\min}=f(X_0)=f(6,7)=(6-16)^2+(7-12)^2=125$, а решением задачи на максимум – $f_{\max} = f(O) = f(0,0) = (0-16)^2 + (0-12)^2 = 400.$

Отметим, что оба оптимальных решения задачи достигаются на границе области, причем одно из них – в ее угловой точке, а другое – во внутренней точке граничного отрезка.

Предположим теперь, что в пространстве заданы $m$ функций $g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X)$, и множество $M \in R^n$ задано системой ограничений

$$\begin{cases} g_r(X) \geq 0,\ r = 1, \ldots, k \\ g_r(X) = 0,\ r = k+1, \ldots, m. \end{cases} \tag{7.1}$$

Таким образом, первые $k$ условий − условия типа неравенств, а оставшиеся − условия типа равенств.

**Определение 7.3.** *Говорят, что система ограничений* (7.1) *удовлетворяет* ***условию регулярности****, если функции* $g_1, g_2, \ldots, g_m$ *являются вогнутыми, и существует точка* $X^* \in M$*, такая, что все нелинейные функции среди* $g_1, g_2, \ldots, g_m$ *больше нуля в этой точке.*

Условие регулярности системы ограничений задачи выпуклого программирования иногда называют условием Слейтера. Таким образом, должна существовать точка $X^* \in M$, являющаяся внутренней для всех множеств, заданных условиями вида $g_r(X) \geq 0$ для нелинейных функций $g_r(X), r = 1, \ldots, m$.

Заметим, что условие Слейтера означает, что каждая из входящих в нее нелинейных функций отлична от нуля в некоторых точках $M$. С другой стороны, среди ограничений, определяющих $M$, есть условия типа равенств $g_r(X) = 0,\ r = k+1, \ldots, m$.

**Следствие 7.1.** *Функции* $g_{k+1}(X), g_{k+2}(X), \ldots, g_m(X)$ *являются линейными.*

Кроме этого, условие регулярности системы ограничений накладывает некоторые ограничения на структуру множества $M$.

**Следствие 7.2.** *Множество* $M$*, заданное системой ограничений* (7.1), *является выпуклым.*

Определим теперь функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(X),$$

где $\Lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)$, и сформулируем общую теорему о решении задачи выпуклого программирования.

**Теорема 7.4** (Куна-Таккера). *Пусть $M \subset R^n$ – выпуклое множество, заданное регулярной системой ограничений* (7.1)*, функция $y = f\left(X\right)$ – вогнутая, а функции $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ – дифференцируемы на $M$. Для того, чтобы точка $X_0 \in M$ являлась точкой глобального максимума функции $y = f\left(X\right)$ на $M$, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\Lambda_0 = \left(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots \lambda_m^0\right) \subset R^m$, удовлетворяющий условиям*

$$\mathcal{L}'_{x_i}\left(X_0, \Lambda_0\right) = 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_i^0 g_i\left(X_0\right) = 0,\ \lambda_i^0 \ge 0,\ i = 1, \ldots, k.$$

**Пример 7.4.** Рассмотрим задачу из примера 7.3 и проверим, что точка $X_0 = \left(6, 7\right)$ удовлетворяет условиям теоремы Куна-Таккера. Перепишем систему ограничений в виде

$$\begin{cases} -2x - y + 19 \ge 0, \\ 3x - 5y + 30 \ge 0, \\ -5x + 4y + 15 \ge 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

и составим функцию Лагранжа для вогнутой функции $f = -(x-16)^2 - (y-12)^2$

$$\mathcal{L}(X, \Lambda) = -(x-16)^2 - (y-12)^2 + \lambda_1\left(-2x - y + 19\right) +$$
$$+ \lambda_2\left(3x - 5y + 30\right) + \lambda_3(-5x + 4y + 15) + \lambda_4 x + \lambda_5 y.$$

Теперь мы можем записать условия теоремы в виде системы:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -2(x-16) - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \mathcal{L}'_y = -2(y-12) - \lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1(-2x - y + 19) = 0, \\ \lambda_2\left(3x - 5y + 30\right) = 0, \\ \lambda_3\left(-5x + 4y + 15\right) = 0, \\ \lambda_4 x = 0,\ \lambda_5 y = 0, \\ \lambda_i \ge 0, i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

Подставляя $x=6, y=7$, немедленно убеждаемся, что $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$, и система сводится к условиям $\begin{cases} 20-2\lambda_1=0, \\ 10-\lambda_1=0, \end{cases}$ откуда имеем, что $\lambda_1=10\geq 0,$ т.е. для точки $X_0=(6,7)$ условия теоремы выполнены.

**Пример 7.5.** Найдите объемы ресурсов $K$ и $L$, при которых затраты на производство не менее 80 единиц продукции минимальны, если производственная функция Кобба–Дугласа $Q(K,L)=K^{3/4}L^{1/4}$, а цены на ресурсы $p_K=6$, $p_L=2$.

Решение. Поскольку целевая функция имеет вид $f(K,L)=p_K K+p_L L$, то имеем задачу

$$\begin{cases} f=6K+2L\to\min, \\ K^{3/4}L^{1/4}\geq 80, \\ K\geq 0,\quad L\geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что функция $f(K,L)$ линейна, т.е. выпукла и вогнута одновременно. Далее, функция Кобба-Дугласа является вогнутой и условие регулярности, очевидно, выполнено (достаточно проверить точку $(81,81)$). Теперь для применения теоремы Куна–Таккера достаточно записать постановку задачи в виде

$$\begin{cases} f=-6K-2L\to\max, \\ K^{3/4}L^{1/4}-80\geq 0, \\ K\geq 0,\quad L\geq 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}=-6K-2L+\lambda_1\left(K^{3/4}L^{1/4}-80\right)+\lambda_2 K+\lambda_3 L.$$

Тогда условия теоремы Куна–Таккера записываются следующим образом:

$$\mathcal{L}'_K = -6 + \frac{3}{4}\lambda_1 K^{-1/4} L^{1/4} + \lambda_2 = 0,$$

$$\mathcal{L}'_L = -2 + \frac{1}{4}\lambda_1 K^{3/4} L^{-3/4} + \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1\left(K^{3/4} L^{1/4} - 80\right) = 0, \quad \lambda_2 K = 0, \quad \lambda_3 L = 0,$$

$$\lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_3 \ge 0.$$

В силу условия $K^{3/4} L^{1/4} - 80 \ge 0$ получаем, что $K \ne 0$, $L \ne 0$ и, следовательно $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Подставляя $\lambda_2 = 0$ в первое уравнение, имеем $\lambda_1 \ne 0$. Таким образом, мы приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\lambda_1 K^{-1/4} L^{1/4} = 6, \\ \frac{1}{4}\lambda_1 K^{3/4} L^{-3/4} = 2, \\ K^{3/4} L^{1/4} = 80 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 8K^{1/4} L^{-1/4}, \\ \lambda_1 = 8K^{-3/4} L^{3/4}, \\ K^{3/4} L^{1/4} = 80. \end{cases} \quad \begin{cases} 8K^{1/4} L^{-1/4} = 8K^{-3/4} L^{3/4}, \\ K^{3/4} L^{1/4} = 80. \end{cases}$$

Из последней системы заключаем, что $K = L = 80$, причем $\lambda_1 = 8 \ge 0$. Таким образом, все условия Куна-Таккера выполнены и $K = L = 80$ – производственный план с минимальными издержками, причем $f_{\min} = f(80,80) = 640$.

## Задачи для самостоятельного решения

Для задач 105-107 найти оптимальное решение графическим методом и для полученного решения проверить выполнение условий теоремы Куна-Таккера;

105. $f = (x-15)^2 + (y-29)^2 \to \min$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 2x + 7y \le 74, \\ -2y + x \ge -18, \\ 2x - 5y \le 2 \end{cases}$

106. $f = (x-32)^2 + (y-33)^2 \to \min$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} x + y \le 17, \\ -y + 6x \ge -3, \\ 3x - 10y \le 12 \end{cases}$

107. $f=(x-24)^2+(y-30)^2 \to \min$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 2x+3y \le 34, \\ -y+2x \ge -6, \\ x-5y \le 4 \end{cases}$

108. Найдите объемы ресурсов $K$ и $L$, при которых затраты на производство не менее 140 единиц продукции минимальны, если производственная функция Кобба–Дугласа $Q(K,L)=K^{2/3}L^{1/3}$, а цены на ресурсы $p_K=12$, $p_L=3$.

# Глава 8
# Методы динамического программирования

## 8.1. Задача динамического программирования

Рассмотрим динамическую систему, которая последовательно, за $n$ шагов, переходит из некоторого начального состояния $\overline{s}_0$ в конечное состояние $\overline{s}_n$. Промежуточные состояния $\overline{s}_i$ определяют состояния системы после $i$-ого шага. Как правило, состояния системы характеризуются несколькими числами, поэтому предполагается, что $\overline{s}_i$ являются векторами с $m$ координатами, т.е. $\overline{s}_i = \left(s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^m\right)$. Переход системы из состояния $\overline{s}_{i-1}$ в состояние $\overline{s}_i$ определяется параметрами (*управлениями*) $\overline{u}_i$ $\left(i = 1, \ldots, n\right)$ при помощи *уравнений состояний*

$$\overline{s}_i = F_i\left(\overline{s}_{i-1}, \overline{u}_i\right),$$

а эффективность каждого шага оценивается функциями $f_i\left(\overline{s}_{i-1}, \overline{u}_i\right)$. Таким образом, эффективность всего процесса характеризуется суммой

$$z_0 = f_1\left(\overline{s}_0, \overline{u}_1\right) + f_2\left(\overline{s}_1, \overline{u}_2\right) + \ldots + f_n\left(\overline{s}_{n-1}, \overline{u}_n\right),$$

а задача состоит в том, чтобы выбрать набор управлений $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$, оптимизирующий (далее предполагается, что решается задача на максимум) $z_0$:

$$z_0^* = z_0^*\left(\overline{s}_0\right) = \max_{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n} z_0 .$$

Процесс решения разбивается на $n$ шагов, для этого введем функцию

$$z_i\left(\overline{s}_i\right) = f_{i+1}\left(\overline{s}_i, \overline{u}_{i+1}\right) + f_{i+2}\left(\overline{s}_{i+1}, \overline{u}_{i+2}\right) + \ldots + f_n\left(\overline{s}_{n-1}, \overline{u}_n\right), \ i = 0, \ldots, n-1,$$

которая характеризует эффективность перехода от состояния $\overline{s}_i$ к $\overline{s}_n$. Последовательно оптимизируя $z_{n-1}\left(\overline{s}_{n-1}\right), z_{n-2}\left(\overline{s}_{n-2}\right), \ldots, z_1\left(\overline{s}_1\right), z_0\left(\overline{s}_0\right)$ по формулам (называемым *уравнениями Беллмана*)

$$z_{n-1}^*\left(\overline{s}_{n-1}\right) = \max_{\overline{u}_n} f_n\left(\overline{s}_{n-1}, \overline{u}_n\right),$$

$$z_{n-2}^*\left(\overline{s}_{n-2}\right)=\max_{\overline{u}_{n-1}}\left[f_{n-1}\left(\overline{s}_{n-2},\overline{u}_{n-1}\right)+z_{n-1}^*\left(\overline{s}_{n-1}\right)\right], \text{ где } \overline{s}_{n-1}=F_{n-1}\left(\overline{s}_{n-2},\overline{u}_{n-1}\right),$$

$$z_{n-3}^*\left(\overline{s}_{n-3}\right)=\max_{\overline{u}_{n-2}}\left[f_{n-2}\left(\overline{s}_{n-3},\overline{u}_{n-2}\right)+z_{n-2}^*\left(\overline{s}_{n-2}\right)\right], \text{ где } \overline{s}_{n-2}=F_{n-2}\left(\overline{s}_{n-3},\overline{u}_{n-2}\right),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$z_1^*\left(\overline{s}_1\right)=\max_{\overline{u}_2}\left[f_2\left(\overline{s}_1,\overline{u}_2\right)+z_2^*\left(\overline{s}_2\right)\right], \text{ где } \overline{s}_2=F_2\left(\overline{s}_1,\overline{u}_2\right),$$

$$z_0^*\left(\overline{s}_0\right)=\max_{\overline{u}_1}\left[f_1\left(\overline{s}_0,\overline{u}_1\right)+z_1^*\left(\overline{s}_1\right)\right], \text{ где } \overline{s}_1=F_1\left(\overline{s}_0,\overline{u}_1\right),$$

находим оптимальное решение задачи. Как видим, процесс решения задачи начинается с оптимизации последнего шага, что называется *обратным ходом* вычислений и свойственно многим задачам динамического программирования.

## 8.2. Задача о распределении средств между предприятиями

Рассмотрим теперь несколько задач о распределении средств между предприятиями

**Пример 8.1** (*непрерывная задача о распределении средств между предприятиями на несколько лет*)**.** Планируется работа двух отраслей производства на *n* лет. Начальные ресурсы составляют $s_0$ у.е. Средства $x$, вложенные в 1-ую отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_1\left(x\right)=0.3x$ и возвращаются в размере $\varphi_1\left(x\right)=0.1x$. Аналогично для 2-ой отрасли прибыль составляет $f_2\left(y\right)=0.2y$, а возврат – $\varphi_2\left(y\right)=0.3y$. В конце каждого года возвращенные средства полностью распределяются между отраслями. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль, если *n*=4, а $s_0=10000$.

Решение. Ясно, что динамической системой являются две отрасли, состояния которых $s_i$ определяются вложенными в них средствами, а управлениями $\overline{u}_i=\left(u_i^1,u_i^2\right)$ на $i$-ом году являются средства $u_i^k$, переданные $k$-ой отрасли. Так как возвращенные средства распределяются полностью, то имеет место условие $s_{i-1}=u_i^1+u_i^2$, т.е. $u_i^2=s_{i-1}-u_i^1$, и фактически задача одномерна. Далее будем считать, что управление на $i$-ом году определяется числом $u_i=u_i^1$, т.е. средствами, выделенными первой отрасли. В силу того же условия уравнения состояний имеют вид

$$s_i=F(s_{i-1},u_i)=\varphi_1(u_i)+\varphi_2(s_{i-1}-u_i)=0.1u_i+0.3(s_{i-1}-u_i)=0.3s_{i-1}-0.2u_i,$$

а прибыль на $i$-ом году равна

$$f(s_{i-1},u_i)=f_1(u_i)+f_2(s_{i-1}-u_i)=0.3u_i+0.2(s_{i-1}-u_i)=0.2s_{i-1}+0.1u_i.$$

Решение задачи начинаем с оптимизации функции $z_3\left(s_3\right)$:

$$z_3^*\left(s_3\right)=\max_{0\le u_4\le s_3} f(s_3,u_4)=\max_{0\le u_4\le s_3}\left[f_1(u_4)+f_2(s_3-u_4)\right]=\max_{0\le u_4\le s_3}\left[0.2s_3+0.1u_4\right].$$

Для вычисления максимума заметим, что требуется найти максимум *линейной* функции на отрезке, поэтому, очевидно,

$$z_3^*\left(s_3\right)=\max_{0\le u_4\le s_3}\left[0.2s_3+0.1u_4\right]=0.3s_3 \text{ при } u_4^*=s_3.$$

Далее,

$$z_2^*\left(s_2\right)=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[f\left(s_2,u_3\right)+z_3^*\left(s_3\right)\right]=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.2s_2+0.1u_3+0.3s_3\right]=$$

$$=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.2s_2+0.1u_3+0.3\left(0.3s_2-0.2u_3\right)\right]=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.29s_2+0.04u_3\right]=0.33s_2$$

при $u_3^*=s_2$.

$$z_1^*\left(s_1\right)=\max_{0\le u_2\le s_1}\left[f\left(s_1,u_2\right)+z_2^*\left(s_2\right)\right]=\max_{0\le u_2\le s_1}\left[0.2s_1+0.1u_2+0.33s_2\right]=$$

$$=\max_{0\le u_2\le s_1}\left[0.2s_1+0.1u_2+0.33\left(0.3s_1-0.2u_2\right)\right]=$$

$$=\max_{0\le u_3\le s_1}\left[0.299s_1+0.034u_2\right]=0.333s_1$$

при $u_2^*=s_1$.

$$z_0^*\left(s_0\right)=\max_{0\le u_1\le s_0}\left[f\left(s_0,u_1\right)+z_1^*\left(s_1\right)\right]=\max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2s_0+0.1u_1+0.333s_1\right]=$$

$$=\max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2s_0+0.1u_1+0.333\left(0.3s_0-0.2u_1\right)\right]=$$

$$=\max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2999s_0+0.0334u_1\right]=0.3333s_0$$

при $u_1^*=s_0$.

Таким образом, поскольку на каждом шаге $u_i^*=s_{i-1}$, то средства каждый год вкладывались во первую отрасль, и

$$s_1=\varphi_1(s_0)=0.1s_0=1000,$$
$$s_2=\varphi_1(s_1)=0.1s_1=100,$$
$$s_3=\varphi_1(s_2)=0.1s_2=10,$$

а максимальная прибыль равна $z_0^*\left(s_0\right)=0.3333s_0=3333$. Полученные результаты можно записать в виде таблицы, в которой по годам расписано распределение средств

| | 1 год | 2 год | 3 год | 4 год |
|---|---|---|---|---|
| I | 10000 | 1000 | 100 | 10 |
| II | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Пример 8.2.** Планируется работа $n$ предприятий на 1 год. Начальные средства равны $s_0$ тыс. у.е., а вложения кратны 1 тыс. у.е. При этом $x$ тыс. у.е., вложенные в $k$-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_k(x)$. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль, если $s_0 = 4$, $n = 3$, а функции $f_i(x)$ заданы в виде таблицы

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 7 | 6 | 6 |
| 3 | 13 | 12 | 14 |
| 4 | 17 | 19 | 18 |

.

Решение. Шагом задачи будем считать выделение средств очередному предприятию, а переменные управления $u_i$ $(i = 1,2,3)$ – средства, выделенные $i$-му предприятию. Таким образом, получаем следующую задачу оптимизации

$$z = f_1(u_1) + f_2(u_2) + f_3(u_3) \to \max$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 4, \\ u_i \ge 0,\ u_i \in Z,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

| $s_{k-1}$ | $u_k$ | $s_k$ | $k=3$ | | $k=2$ | | $k=1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $f_3(u_3)$ | $u_3^*$ | $f_2(u_2)+z_2^*(s_2)$ | $u_2^*$ | $f_1(u_1)+z_1^*(s_1)$ | $u_1^*$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | | 0+1 | | | |
| | 1 | 0 | **1** | 1 | **3+0=3** | 1 | | |
| 2 | 0 | 2 | 0 | | **0+6=6** | 0 | | |
| | 1 | 1 | 1 | | 3+1 | | | |
| | 2 | 0 | **6** | 2 | **6+0=6** | 2 | | |
| 3 | 0 | 3 | 0 | | **0+14=14** | 0 | | |
| | 1 | 2 | 1 | | 3+6 | | | |
| | 2 | 1 | 6 | | 6+1 | | | |
| | 3 | 0 | **14** | 3 | 12+0 | | | |
| 4 | 0 | 4 | 0 | | 0+18 | | **0+19=19** | 0 |
| | 1 | 3 | 1 | | 3+14 | | 2+14 | |
| | 2 | 2 | 6 | | 6+6 | | 7+6 | |
| | 3 | 1 | 14 | | 12+1 | | 13+1 | |
| | 4 | 0 | **18** | 4 | **19+0=19** | 4 | 17+0 | |

Состояние $s_i$ определяется количеством оставшихся после $i$-го шага средств. Тогда уравнения Беллмана имеют вид

$$z_2^*(s_2) = \max_{0 \le u_3 \le s_2} f_3(u_3),$$

$$z_1^*(s_1) = \max_{0 \le u_2 \le s_1} \left[ f_2(u_2) + z_2^*(s_2) \right], \text{ где } s_2 = s_1 - u_2,$$

$$z_0^*(s_0) = \max_{0 \le u_1 \le s_0} \left[ f_1(u_1) + z_1^*(s_1) \right], \text{ где } s_1 = s_0 - u_1.$$

Решение задачи удобно представлять в виде таблицы, причем ее заполнение начинается с 3-го предприятия (k=3). При этом в левом столбце указаны все варианты выделения средств, а в правом – соответствующие оптимальные управления $u_3^*$.

В столбцах, соответствующих второму и первому предприятиям, последовательно подсчитаны суммарная прибыль от выделения им средств вместе с прибылью, полученной от вложений в предыдущие предприятия. Оптимальные из рассмотренных в каждой клетке таблицы вариантов выделены жирным шрифтом.

Ответ: $u_1^* = 0, u_2^* = 4, u_3^* = 0$, $z_0^*(s_0) = 19$.

### Задачи для самостоятельного решения

Планируется действие двух отраслей производства на 4 года. Начальные ресурсы 10000 у.е. Средства $x$, вложенные в 1-ую отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x)$. Средства $y$, вложенные во 2-ую отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_2(y)$ и возвращаются в размере $\varphi_2(y)$. В конце года возвращенные средства заново перераспределяются между отраслями. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль, если

109. $f_1(x) = 0.9x$, $\varphi_1(x) = 0.7x$, $f_2(y) = 0.8y$, $\varphi_2(y) = 0.9y$.

110. $f_1(x) = 0.7x$, $\varphi_1(x) = 0.2x$, $f_2(y) = 0.6y$, $\varphi_2(y) = 0.4y$.

111. $f_1(x) = 0.3x$, $\varphi_1(x) = 0.1x$, $f_2(y) = 0.2y$, $\varphi_2(y) = 0.3y$.

112. $f_1(x) = 0.5x$, $\varphi_1(x) = 0.6x$, $f_2(y) = 0.7y$, $\varphi_2(y) = 0.4y$.

Планируется работа $n$ предприятий на 1 год. Начальные средства равны $s_0$ тыс. у.е., а вложения кратны 1 тыс. у.е. При этом $x$ тыс. у.е., вложенные в $k$-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль $f_k(x)$. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль, если

113. $s_0 = 4$, $n = 3$,

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 5 |
| 2 | 7 | 8 | 9 |
| 3 | 11 | 12 | 13 |
| 4 | 20 | 16 | 17 |

114. $s_0 = 4$, $n = 3$,

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 3 |
| 2 | 8 | 8 | 9 |
| 3 | 12 | 13 | 14 |
| 4 | 16 | 18 | 17 |

## Ответы

1. $E_D(4) = -8/3$, спрос эластичен.
2. При $p \in (8,16)$ спрос эластичен, функция $R(p)$ убывает, при $p \in (0,8)$ спрос неэластичен, функция $R(p)$ возрастает.
3. $p_1 = 2$, $p_2 = 9$; при $p \in (2,9)$.
4. $p_0 = 100$; $E_D(100) = -2/7$, спрос неэластичен.
5. $p_0 = 5$; $D(5) = 125$.
6. $p_0 = 4$; $p_t = p_0 + 3/5t$; $s_1 : d_1 = 3/2$.
7. $\Pi_{\max} = \Pi(120) = 1510000.$
8. $q = 187,5$ − точка максимума прибыли; множество безубыточности $q_{1,2} = \dfrac{125}{6}\left(9 \pm \sqrt{76,2}\right)$, $MC = 0,04q + 6$, $MR = 15 - 0,008q$.
9. $q_0 = 9$; $t = 36$; $T(36) = 162$; $q_t = 4,5$.
10. $(38,17; 14,5; 11,5)$.
11. $\Pi(9,1) = 300.$
12. $(10/27; 250/27)$.
13. $\mathrm{MRS}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \dfrac{x_2}{2x_1}$, $\mathrm{MRS}_{X_1,X_2}(1,8) = 4$; изоклина $x_2 - 8x_1 = 0$.
14. $U'_{x_1}(3, 5) = 48$, $U'_{x_2}(3, 5) = 8$, $MRS_{X_1,X_2}(3, 5) = 6.$
15. Набор $(3, 5)$ является самым дешевым, а $(5, 7)$ – нет.
16. Является.
17. $\mathrm{MRS}_{X_1,X_2} = \dfrac{4L^2}{3K^2}$, план $(K, L) = (6, 3)$ обеспечивает наибольший выпуск продукции при данном уровне издержек, для плана $(K, L) = (3, 6)$ уровень издержек минимально возможным не будет.
18. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 100 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}$, $z(X^*) = 1880$.
19. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 70 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 40 & 90 \end{pmatrix}$, $z(X^*) = 3420$.

20. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 80 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 90 & 0 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 2750$.

21. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 90 \\ 30 & 0 & 30 & 20 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 3300$.

22. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 20 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 100 & 10 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 2530$.

23. $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 100 \\ 20 & 70 & 0 & 30 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 2990$.

24. $X^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 20 & 70 & 50 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 4060$.

25. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 100 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 100 & 40 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 4720$.

26. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \\ 90 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 3380$.

27. $X^* = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 35 \\ 75 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 780$.

28. $X^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 115 \\ 0 & 70 & 20 & 0 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 1750$.

29. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 50 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 85 & 45 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 1535$.

30. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 85 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 95 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 1560$.

31. $X^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 50 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 1070$.

32. $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 70 & 10 & 0 & 120 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 2430$.

33. $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 70 \\ 0 & 90 & 0 & 0 \\ 65 & 0 & 80 & 35 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 4315$.

34. $X^* = \begin{pmatrix} 75 & 35 & 40 & 0 \\ 0 & 110 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 60 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 3145$.

35. $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 0 & 70 \\ 0 & 80 & 0 & 25 \\ 40 & 0 & 55 & 20 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 3160$.

36. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 50 \\ 90 & 40 & 40 & 0 \\ 0 & 20 & 100 & 20 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 4580$.

37. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 40 \\ 0 & 75 & 25 & 55 \\ 100 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$, $z\left(X^*\right) = 2770$.

38. $z_{\max} = z(0,4,2,0,1) = 17.$

39. $z_{\min} = z\left(2,6,33,0,0\right) = -33$.

40. $z_{\min} = z\left(2,5,0,0,17\right) = -36$.

41. $z_{\max} = z(6,7,3,0) = 29$.

42. $z_{\min} = z(0,0,15/4,13/2) = -55/4$.

43. $z_{\max} = z(X^*) = 12$, где $X^* = \left(3/2 + t/2, 2 - 2t, 0, 4 - 4t\right),\ t \in \left[0,1\right]$.

44. $z_{\min} = z\left(1,0,0,4\right) = -4$.

45. $z_{\max} = z\left(0,1,1,1,0\right) = 19$.

46. $z_{\max} = z(X^*) = 12$, где $X^* = \left(1 + t/3, 1 - t/3, 1 + t, 1 - t, 0\right),\ t \in \left[0,1\right]$.

47. $z_{\min} = z\left(0,0,12,1,3\right) = -34$.

48. $z_{\max} = z\left(1,0,3,0,3\right) = 40$.

49. $z_{\min} = z\left(0,0,2,18,3\right) = -2$.

50. $z_{\max} = z(2,1,0,5,0) = 36$.

51. 900 г киви, 600 г гранатов, стоимость 210 руб.

52. $z_{\max} = z(3,5) = 47$.

53. $z_{\min} = z(5,0) = 17$.

54. $z_{\min} = z(0,19) = 23$.

55. $z_{\min} = z(2,6) = 40$.

56. $z_{\max} = z(2,2,0,1,4) = 7$.

57. $z_{\max} = z(0,1,2,14) = 50$.

58. $z_{\max} = z(1,0,0,3,1) = 11$.

59. $z_{\max} = z(13/12, 7/6, 0, 5/6, 0) = -8\frac{2}{3}$.

60. $z_{\max} = z(0,4,0,2,1) = -16$.

61. $z_{\max} = z(0, 17/4, 1, 0, 5/4) = 38$.

62. $z_{\max} = z(0,0,0,3,2) = -36$.

63. $z_{\max} = z(17/6, 0, 5/6, 0, 1) = -5/2$.

64. $z_{\max} = z(3,4) = 26$.

65. $z_{\max} = z(5,7) = 51$.

66. $z_{\max} = z(2,2) = -2$.

67. 2 комплекта I типа и 7 комплектов II типа. Максимальная прибыль – 25 у.е.

68. *Указание.* Бревна можно распилить тремя способами: либо на 2 заготовки по 1,2 м, либо 1 заготовку по 1,2 м и 2 – по 0,8 м, либо 3 заготовки по 0,8 м. Если $x_1$, $x_2$ и $x_3$ – количество заготовок, распиливаемое по 1-му, 2-му и 3-му вариантам, то задача имеет следующие решения: $x^* = (5,41,0)$, $x^* = (6,39,1)$, $x^* = (7,36,3)$ и $x^* = (6,38,2)$ с $x_1 + x_2 + x_3 = 46$.

69. Допустимое множество – пятиугольник OABCD, где O(0;0), A(0;7), B(3;7), C(4;6), D(6;0). Парето-оптимальная граница – отрезок [BC]: $(3+t; 7-t)$, $t \in [0;1]$.

70. Допустимое множество – четырехугольник OABC, где O(0;0), A(0;15), B(10;15), C(40;0). Парето-оптимальная граница – отрезок [BC]: (10+30*t*;15-15*t*), $t \in [0;1]$.

71. Допустимое множество – пятиугольник ABCDE, где A(0;1), B(1;2), C(3;2), D(3;1), E(1;0). Парето-оптимальная граница – ломаная CDE: CD : (3;2)(1-*t*)+*t*(3;1)=(3;2-*t*), $t \in [0;1]$, DE : (3;1)(1-*t*)+*t*(1;0)=(3-2*t*;1-*t*), $t \in [0;1]$.

72. Допустимое множество – четырехугольник OABC, где O(0;0), A(0;4), B(2;3), C(3;0). Парето-оптимальная граница – отрезок [OA]: (0;4*t*), $t \in [0;1]$.

73. Допустимое множество – пятиугольник OABCD, где O(0;0), A(0;5), B(3;5), C(6;2), D(6;0). Парето-оптимальная граница – отрезок [BC]: (3+3$t$;5-3$t$), $t \in [0;1]$.

74. Допустимое множество – пятиугольник OABCD, где O(0;0), A(0;8), B(2;8), C(7;3), D(7;0). Парето-оптимальная граница – отрезок [BC]: (2+5$t$;8-5$t$), $t \in [0;1]$.

75. Допустимое множество – четырехугольник OABC, где O(0;0), A(0;6), B(4;4), C(4;0). Парето-оптимальная граница – ломаная BCO: (0;4$t$), $t \in [0;1]$.

76. Допустимое множество – четырехугольник OABC, где O(0;0), A(0;5), B(3;4), C(5;0). Парето-оптимальная граница – отрезок [AB]: (3$t$;5-$t$), $t \in [0;1]$.

77. а) $X^* = (5{,}6;\ 4{,}4), f^* = (18{,}8;\ 15{,}6)$; б) $X^* = (5;\ 5), f^*_{об} = 55, f_1^* = 20, f_2^* = 15$; в) если $f_1 \succ f_2$, то $X^* = (5;\ 5), f_1^* = 20, f_2^* = 15$, если $f_2 \succ f_1$, то $X^* = (8;\ 2)$, $f_1^* = 14, f_2^* = 18$.

78. а) $X^* = (4{,}4;\ 3{,}6), f^* = (16{,}8;\ 11{,}6)$; б) $X^* = (5;3), f^*_{об} = 47, f_1^* = 18, f_2^* = 11$; в) если $f_1 \succ f_2$, то $X^* = (5;\ 3), f_1^* = 18, f_2^* = 11$, если $f_2 \succ f_1$, то $X^* = (2;\ 6)$, $f_1^* = 12, f_2^* = 14$.

79. а) $X^* = (2{,}6;\ 6{,}4), f^* = (11{,}6;\ 21{,}8)$; б) $X^* = (2+3t; 7-3t), t \in [0;1]$, $f^*_{об} = 45$; в) если $f_1 \succ f_2$, то $X^* = (5;\ 4), f_1^* = 14, f_2^* = 17$, если $f_2 \succ f_1$, то $X^* = (2;\ 7)$, $f_1^* = 11, f_2^* = 23$.

80. а) $X^* = (3;\ \frac{22}{13}), f^* = (\frac{144}{13}; -\frac{5}{13})$; б) $X^* = (3;2)$, $f^*_{об} = 23, f_1^* = 12, f_2^* = -1$; в) если $f_1 \succ f_2$, то $X^* = (3;\ 2), f_1^* = 12, f_2^* = -1$, если $f_2 \succ f_1$, то $X^* = (3;\ 1)$, $f_1^* = 9, f_2^* = 1$.

81. а) $X^* = (3;\ 4), f^* = (63;\ 52)$; б) $X^* = (3;4)$, $f^*_{об} = 178, f_1^* = 63, f_2^* = 52$; в) если $f_1 \succ f_2$, то $X^* = (3;\ 4), f_1^* = 63, f_2^* = 52$, если $f_2 \succ f_1$, то $X^* = (3;\ 4)$, $f_1^* = 63, f_2^* = 52$.

82. а), б) 6 мин. рекламы на радио и 2 мин. рекламы на ТВ.

83. $\alpha = \beta = \nu = 6$, оптимальные решения ($A_2$;$B_4$).

84. $\alpha = 17$, $\beta = 18$, седловой точки нет.

85. $\alpha = \beta = 6$, оптимальные решения ($A_3$;$B_2$).

86. $\alpha = 4$, $\beta = 6$, седловой точки нет.

87. $\alpha = 3$, $\beta = 4$, седловой точки нет.

88. $\alpha = 0$, $\beta = 1$, седловой точки нет.

89. $\alpha = \beta = 6$, оптимальные решения ($A_2$;$B_3$).

90. $p_{опт} = (\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$, $q_{опт} = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$, $\nu = \frac{33}{4}$.

91. $p_{опт} = (\frac{3}{5}; \frac{2}{5})$, $q_{опт} = (\frac{3}{5}; \frac{2}{5})$, $\nu = \frac{19}{25}$.

92. $p_{опт} = (0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$, $q_{опт} = (0; \frac{5}{12}; \frac{7}{12}; 0)$, $\nu = -\frac{3}{2}$.

93. $v=-1$, оптимальная стратегия ($A_3$;$B_2$).

94. $v=1$, оптимальная стратегия ($A_1$;$B_1$).

95. $p_{опт}=(0;\frac{1}{3};\frac{2}{3})$, $q_{опт}=(0;\frac{1}{3};\frac{2}{3})$, $v=\frac{26}{3}$.

96. $p_{опт}=(\frac{1}{4};\frac{3}{4})$, $q_{опт}=(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$, $v=\frac{5}{2}$.

97. $p_{опт}=(\frac{5}{7};\frac{2}{7})$, $q_{опт}=(\frac{5}{7};\frac{2}{7};0;0)$, $v=\frac{13}{7}$.

98. $p_{опт}=(0;\frac{1}{3};\frac{2}{3})$, $q_{опт}=(\frac{1}{6};\frac{5}{6};0)$, $v=\frac{5}{3}$.

99. $p_{опт}=(0;1;0)$, $q_{опт}=(0;0;1)$, $v=4$.

100. $p_{опт}=(0;1;0;0)$, $q_{опт}=(0;0;1;0)$, $v=6$.

101. Оптимальные стратегии по критерию Вальда – $A_1$; по критерию Сэвиджа – $A_3$; по критерию Гурвица – $A_3$; по критерию Лапласа – $A_3$.

102. Оптимальные стратегии по критерию Вальда – $A_2$; по критерию Сэвиджа – $A_1$; по критерию Гурвица – $A_2$; по критерию Лапласа – $A_1$.

103. Оптимальные стратегии по критерию Вальда – $A_2$; по критерию Сэвиджа – $A_2$; по критерию Гурвица – $A_2$; по критерию Лапласа – $A_2$.

104. Оптимальные стратегии по критерию Вальда – $A_2$, $A_4$; по критерию Сэвиджа – $A_4$; по критерию Гурвица – $A_2$, $A_4$; по критерию Лапласа – $A_4$.

105. $z_{\min}=z(9,8)=477$.

106. $z_{\min}=z(8,9)=1152$.

107. $z_{\min}=z(8,6)=832$.

108. $z_{\min}=z(9,8)=10$.

109.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| I | 10000 | 0 | 0 | 0 |
| II | 0 | 7000 | 6300 | 5670 |

, $z_0^*(s_0)=28241$.

110.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| I | 10000 | 0 | 0 | 0 |
| II | 0 | 2000 | 800 | 320 |

, $z_0^*(s_0)=9808$.

111.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| I | 10000 | 1000 | 0 | 0 |
| II | 0 | 0 | 100 | 30 |

, $z_0^*(s_0)=3332$.

112.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| I | 0 | 0 | 0 | 640 |
| II | 10000 | 4000 | 1600 | 0 |

, $z_0^*(s_0)=11552$.

113.

| $u_1^*$ | $u_2^*$ | $u_3^*$ | $z_0^*$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 0 | 20 |

.

114.

| $u_1^*$ | $u_2^*$ | $u_3^*$ | $z_0^*$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 19 |

## Рекомендуемая литература

1. **Акулич И.Л.** *Математическое программирования в примерах и задачах.* М.: Высшая школа, 1993.

2. **Бабайцев В.А. и др.** *Сборник задач по курсу математики.* Под редакцией А.С. Солодовникова и А.В. Браилова. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2001.

3. **Бабайцев В.А., Гисин В.Б., Рябов П.Е.** *Математические методы финансового анализа. Руководство к решению задач.* М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2003.

4. **Винюков И.А., Попов В.Ю., Пчелинцев С.В.** *Линейное программирование. Учебное пособие для подготовки бакалавров.* М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2009.

5. **Гончаренко В.М.** *Математические модели и методы исследования операций. Руководство к решению задач*. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2006.

6. **Гончаренко В.М., Попов В.Ю.** *Экономические приложения линейного программирования.* Учебное пособие. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2003.

7. **Интрилигатор М.** *Математические методы оптимизации и экономическая теория.* М.: Айрис-Пресс, 2002.

8. **Колемаев В.А.** *Математические методы и модели исследования операций. Учебник.* М.: ЮНИТИ, 2008.

9. **Красс М.С., Чупрынов Б.П.** *Основы математики и ее приложения в экономическом образовании.* М.: Дело, 2002.

10. **Кремер Н.Ш.** *Исследование операций в экономике.* М.: ЮНИТИ, 1996.

11. **Липагина Л.В.** *Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Учебное пособие для подготовки бакалавров*. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2009.

12. **Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г.** *Математика в экономике. Ч.1-2.* М.: Финансы и статистика, 2007.

13. **Солодовников А.С.** *Динамическое программирование. Лекции по курсу «Математические модели и методы исследования операции»*. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2003.

14. **Ягодовский П.В.** Функции нескольких переменных. Учебное пособие для подготовки бакалавров. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2009.